

Systèmes du 1^{er} degré à 2 inconnues

Un boulanger vend pour 522 € de baguettes de pain dans une journée. La baguette ordinaire est vendue 0,80 € et la baguette tradition 1,00 €. Sachant qu'il a vendu au total 590 baguettes, quel est le nombre de baguette ordinaire et de baguette tradition vendues dans la journée ? Soit x le nombre de baguette ordinaire et y le nombre de baguette tradition.

Un **système** d'équations du 1^{er} degré à 2 inconnues est de la forme :

$$\begin{cases} ax + by = c & \textcircled{1} \\ a'x + b'y = c' & \textcircled{2} \end{cases}$$

On écrit les deux équations l'une sous l'autre en les associant à l'aide d'une accolade.

Exemple :
$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 & \textcircled{1} \\ x + 3y = 9 & \textcircled{2} \end{cases}$$

Résoudre le système, c'est déterminer l'ensemble des couples $(x ; y)$ vérifiant à la fois les équations (1) et (2).

Le principe de résolution consiste à éliminer une inconnue pour se « ramener » à la résolution d'une équation du premier degré à une inconnue que l'on sait résoudre.

a) Résolution algébrique

◆ Méthode par substitution

On exprime une inconnue en fonction de l'autre dans une équation.

De $\textcircled{2}$, on tire : $x = \dots\dots\dots$

On reporte l'expression obtenue dans l'autre équation ($\textcircled{1}$): $3 \times \dots\dots\dots - 2y = 5 \Rightarrow$

On résout l'équation du premier degré à une inconnue : $\dots\dots\dots$

On en déduit la valeur de l'autre inconnue : $x = \dots\dots\dots$

La solution du système est le couple : $\dots\dots\dots$

◆ Méthode par addition ou combinaison linéaire

On multiplie les deux membres d'une équation (ou des deux) par un coefficient convenable de façon à faire disparaître une inconnue par addition :

Ici on multiplie l'équation $\textcircled{2}$ par $\dots\dots\dots$, de façon à éliminer x .

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 & \textcircled{1} \\ x + 3y = 9 & \textcircled{2} \times \dots\dots \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$$

$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots \Rightarrow y = \dots\dots\dots$

Pour éliminer y , on multiplie l'équation $\textcircled{1}$ par $\dots\dots$ et l'équation $\textcircled{2}$ par $\dots\dots$

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 & \textcircled{1} \times \dots\dots \\ x + 3y = 9 & \textcircled{2} \times \dots\dots \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$$

$\dots\dots\dots = \dots\dots \Rightarrow x = \dots\dots\dots$

La solution du système est le couple $\dots\dots\dots$

b) Résolution graphique

On transforme chacune des deux équations de façon à obtenir l'équation d'une droite.

L'équation d'une droite est de la forme $y = ax + b$ ("a" est le coefficient directeur de la droite et "b" l'ordonnée à l'origine).

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 & \textcircled{1} \\ x + 3y = 9 & \textcircled{2} \end{cases}$$

De l'équation ① :
 (Equation de la droite D₁)

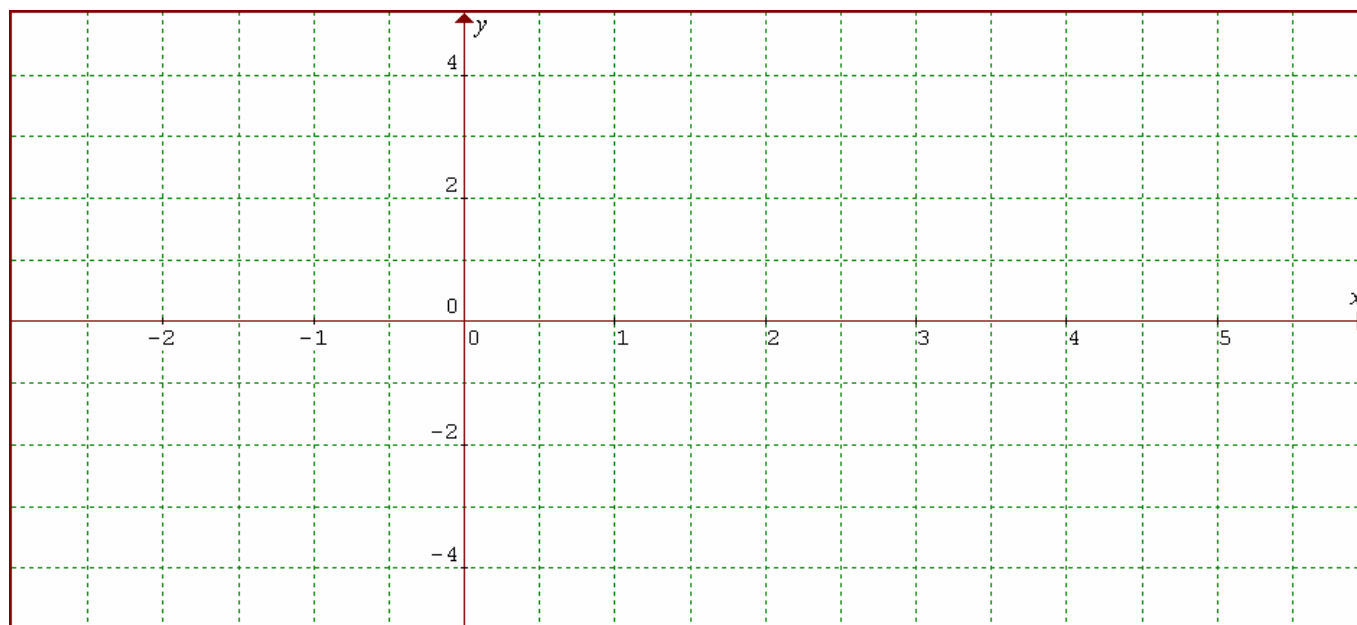
De l'équation ② :
 (Equation de la droite D₂)

On trace les 2 droites dans un repère.

2 points suffisent pour tracer une droite :

| | | | |
|----------------|-----------|-------|-------|
| D ₁ | x | 0 | 4 |
| | y = | | |

| | | | |
|----------------|-----------|-------|-------|
| D ₂ | x | 0 | 6 |
| | y = | | |



Le point d'intersection des droites (I) a pour coordonnées (..... ;) :

La solution du système est le couple (..... ;)

Mettons en équation le problème proposé en début de cours :

$$\begin{cases} x + y = 590 \\ x \times 0,8 + y \times 1 = 522 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x + y = 590 & \textcircled{1} \\ 0,8x + y = 522 & \textcircled{2} \end{cases}$$

Par substitution:

De ①, on peut déduire $y = \dots\dots\dots$

Dans ②, on remplace y par son expression en fonction de x : $\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

D'où $y = \dots\dots\dots$

Le boulanger a vendu $\dots\dots\dots$ baguettes ordinaires et $\dots\dots\dots$ baguettes "tradition".

Par combinaison linéaire :

$$\begin{cases} x + y = 590 & \textcircled{1} \\ 0,8x + y = 522 & \textcircled{2} \end{cases}$$

① - ② : $\dots\dots\dots$

Dans ① : $\dots\dots\dots$

Graphiquement :

De ①, on déduit : $y = \dots\dots\dots$ (Droite D_1)

De ②, on déduit : $y = \dots\dots\dots$ (Droite D_2)



Le point d'intersection (I) des 2 droites a pour coordonnées : (..... ;) :

La solution du système est le couple (..... ;)