Systèmes du 1er degré à 2 inconnues

Un boulanger vend pour 522 € de baguettes de pain dans une journée. La baguette ordinaire est vendue 0,80 € et la baguette tradition 1,00 €. Sachant qu'il a vendu au total 590 baguettes, quel est le nombre de baguette ordinaire et de baguette tradition vendues dans la journée ? Soit x le nombre de baguette ordinaire et y le nombre de baguette tradition.

Un **système** d'équations du 1er degré à 2 inconnues est de la forme :

$$\begin{cases} ax + by = c & ① \\ a'x + b'y = c' & ② \end{cases}$$

On écrit les deux équations l'une sous l'autre en les associant à l'aide d'une accolade.

Exemple : $\begin{cases} 3x - 2y = 5 & ① \\ x + 3y = 9 & ② \end{cases}$

Résoudre le système, c'est déterminer l'ensemble des couples $(x\ ;\ y)$ vérifiant à la fois les équations (1) et (2).

Le principe de résolution consiste à éliminer une inconnue pour se « ramener » à la résolution d'une équation du premier degré à une inconnue que l'on sait résoudre.

a) Résolution algébrique

♦ Méthode par substitution

On exprime une inconnue en fonction de l'autre dans une équation.

De ②, on tire : $x = 9 - 3y$

On reporte l'expression obtenue dans l'autre équation (①): $3 \times (9 - 3y) - 2y = 5 \Rightarrow$

On résout l'équation du premier degré à une inconnue : $27 - 9y - 2y = 5 \Rightarrow -11y = 5 - 27 \Rightarrow -11y = -22$

$\Rightarrow y = \dfrac{-22}{-11} \Rightarrow y = 2$

On en déduit la valeur de l'autre inconnue : $x = 9 - 3 \times 2 \Rightarrow x = 9 - 6 \Rightarrow x = 3$

La solution du système est le couple : **(3 ; 2)**.

♦ Méthode par addition ou combinaison linéaire

On multiplie les deux membres d'une équation (ou des deux) par un coefficient convenable de façon à faire disparaître une inconnue par addition :

Ici on multiplie l'équation ② par –3, de façon à éliminer x.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 & ① \\ x + 3y = 9 & ② \times -3 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ -3x - 9y = -27 \end{cases}$$

$$0x - 11y = -22 \Rightarrow y = \frac{-22}{-11} \Rightarrow y = 2$$

Pour éliminer y, on multiplie l'équation ① par 3 et l'équation ② par 2

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 & ① \times 3 \\ x + 3y = 9 & ② \times 2 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} 9x - 6y = 15 \\ 2x + 6y = 18 \end{cases}$$

$$11x + 0y = 33 \Rightarrow x = \frac{33}{11} \Rightarrow x = 3$$

La solution du système est le couple (3 ; 2)

b) Résolution graphique

On transforme chacune des deux équations de façon à obtenir l'équation d'une droite.

L'équation d'une droite est de la forme y = ax + b ("a" est le coefficient directeur de la droite et "b" l'ordonnée à l'origine).

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 & ① \\ x + 3y = 9 & ② \end{cases}$$

De l'équation ① : $2y = 3x - 5 \Rightarrow y = \dfrac{3x-5}{2} \Rightarrow y = 1{,}5x - 2{,}5$ (Equation de la droite D_1)

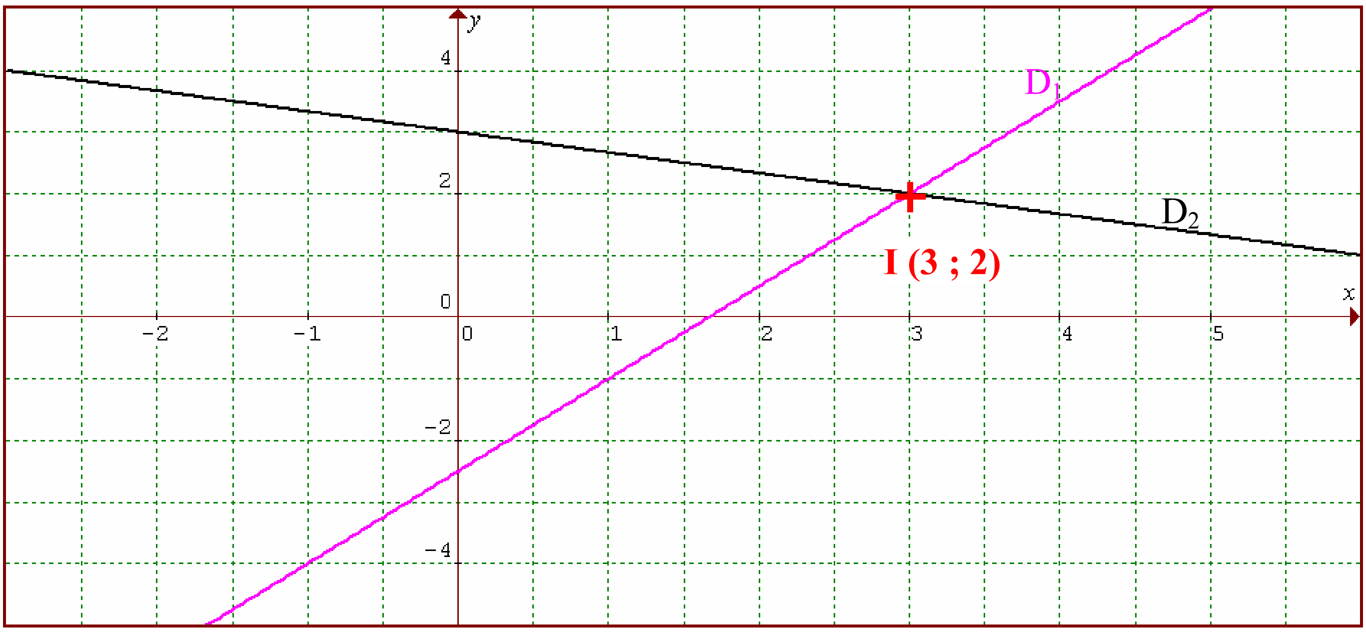
De l'équation ② : $3y = -x + 9 \Rightarrow y = \dfrac{-x+9}{3} \Rightarrow y = \dfrac{-x}{3} + 3$ (Equation de la droite D_2)

On trace les 2 droites dans un repère.

2 points suffisent pour tracer une droite :

D_1	x	0	4
	$y = 1{,}5x - 2{,}5$	$-2{,}5$	3,5

D_2	x	0	6
	$y = \dfrac{-x}{3} + 3$	3	1



Le point d'intersection (I) des 2 droites a pour coordonnées (3 ; 2) :

La solution du système est le couple (3 ; 2)

Mettons en équation le problème proposé en début de cours :

$$\begin{cases} x + y = 590 \\ x \times 0,8 + y \times 1 = 522 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x + y = 590 & ① \\ 0,8x + y = 522 & ② \end{cases}$$

Par substitution:

De ①, on peut déduire $y = 590 - x$

Dans ②, on remplace y par son expression en fonction de x : $0,8x + (590 - x) = 522 \Rightarrow -0,2x = 522 - 590$

$$\Rightarrow -0,2x = -68 \Rightarrow x = \frac{-68}{-0,2} \Rightarrow x = 340$$

D'où $y = 590 - 340 \Rightarrow y = 250$

Le boulanger a vendu **340 baguettes ordinaires et 250 baguettes "tradition"**.

Par combinaison linéaire :

$$\begin{cases} x + y = 590 & ① \\ 0,8x + y = 522 & ② \end{cases}$$

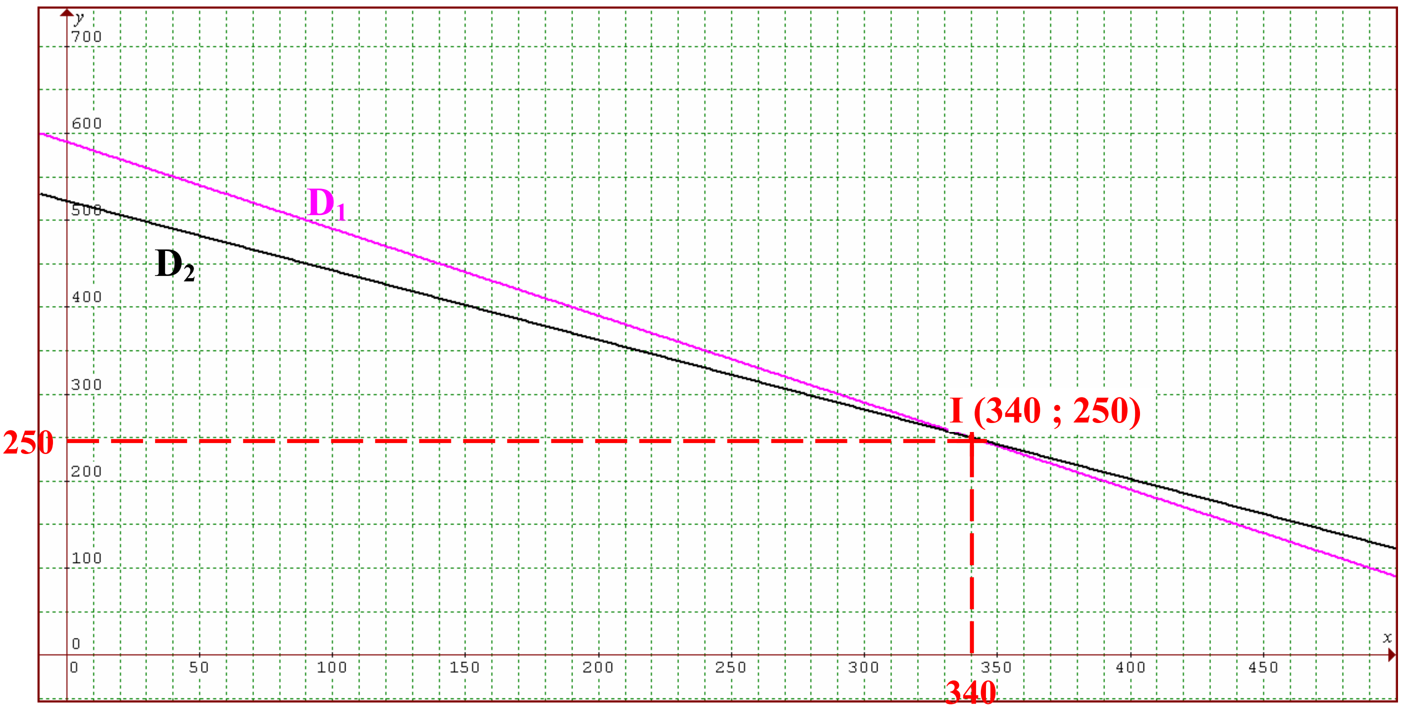
$① - ②$: $0,2x = 68 \Rightarrow x = \dfrac{68}{0,2} \Rightarrow x = 340.$

Dans ① : $340 + y = 590 \Rightarrow y = 590 - 340 \Rightarrow y = 250$

Graphiquement :

De ①, on déduit : $y = -x + 590$ (Droite D_1)

De ②, on déduit : $y = -0,8x + 522$ (Droite D_2)



Le point d'intersection (I) des 2 droites a pour coordonnées : (340 ; 250) :

La solution du système est le couple (340 ; 250)