Les Suites numériques

Une suite numérique est une liste rangée de nombres (on ne peut donc pas les déplacer dans la liste). Chaque nombre de la liste est appelé terme de la suite ; il est repéré par son rang. Le terme de rang n est noté u_n (u indice n)

① Suites Arithmétiques

Approche :

$$\left.\begin{array}{l} 12 ; 18 ; 24 ; 30 \\ \\ 30 ; 24 ; 18 ; 12 \end{array}\right\} \text{sont des suites arithmétiques}$$

Définition :

Une suite numérique est dite arithmétique si chaque terme, autre que le premier, s'obtient en ajoutant au terme précédent un nombre donné constant appelé raison de la suite et noté "r".

$$\boxed{u_n = u_{n-1} + r}$$

u_1 est le premier terme ou base

Comment reconnaître si une suite est arithmétique ?

Il faut calculer toutes les différences $u_n - u_{n-1}$, u_n et u_{n-1} étant deux termes consécutifs. Si toutes les différences sont égales alors la suite est arithmétique (ces différences donnent la raison r)

Calcul du terme de rang "n" d'une suite arithmétique :

Pour n entier supérieur ou égal à deux :

$u_2 = u_1 + r$

$u_3 = u_2 + r = u_1 + 2r$

$$\boxed{u_n = u_1 + (n-1) \cdot r}$$

Somme S_k des "k" premiers termes d'une suite arithmétique ?

$S_k = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_k$

$u_1 + u_k = u_1 + u_1 + (k-1). r$

$u_1 + u_k = 2u_1 + (k-1). r$

$u_2 + u_{k-1} = u_1 + r + u_1 + (k-2). r$

$u_2 + u_{k-1} = 2u_1 + u_1 + (k-1). r = u_1 + u_k$

$u_3 + u_{k-2} = u_1 + 2r + u_1 + (k-3). r$

$u_3 + u_{k-2} = 2u_1 + u_1 + (k-1). r = u_1 + u_k$

On a : $S_k = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_k$ et $S_k = u_k + u_{k-1} + u_{k-2} + \ldots + u_1$

En ajoutant membre à membre, on obtient : $2S_k = 2(u_1 + u_k)$

En conséquence, on a :

$$\boxed{S_k = k\,\frac{u_1 + u_k}{2}}$$

Exercices :

I. Calculer le 100ème terme et le 250ème terme d'une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 1{,}24$ et de raison $r = 0{,}02$.

$u_n = u_1 + (n - 1) \times r$

$u_{100} = u_1 + 99r = 1{,}24 + 99 \times 0{,}02 = 3{,}22$

$u_{250} = u_1 + 249r = 1{,}24 + 249 \times 0{,}02 = 6{,}22$

II. Dans la suite arithmétique de premier terme $u_1 = 55$ et de raison $r = 7{,}5$, un terme est égal à 235, quel est son rang ?

$u_n = u_1 + (n - 1) \times r$

$235 = 55 + (n - 1) \times 7{,}5 \Rightarrow 235 = 55 + 7{,}5n - 7{,}5 \Rightarrow 235 - 55 + 7{,}5 = 7{,}5n$

$7{,}5n = 187{,}5 \Rightarrow n = \dfrac{187{,}5}{7{,}5} = 25$

III. Dans une suite arithmétique, on a : $u_6 = 90$ et $u_{12} = 192$. Calculer la raison r et le premier terme u_1 .

$\begin{cases} u_6 = u_1 + 5r \\ u_{12} = u_1 + 11r \end{cases} \qquad \begin{cases} 90 = u_1 + 5r & ① \\ 192 = u_1 + 11r & ② \end{cases}$

$① - ② : -102 = -6r \Rightarrow r = \dfrac{102}{6} = 17$

$\boxed{r = 17 \,;\, u_1 = 5}$

$u_1 = u_6 - 5r = 90 - 5 \times 17 = 90 - 85 = 5$

IV. Une suite arithmétique a pour premier terme $u_1 = 7$ et pour dernier terme $u_k = 73{,}5$. La somme de ses termes est 805. Combien possède-t-elle de termes ?

$S_k = 805 = k\left(\dfrac{u_1 + u_k}{2}\right) \Rightarrow 805 = k\left(\dfrac{7 + 73{,}5}{2}\right) \Rightarrow 805 = 40{,}25\,k \Rightarrow k = \dfrac{805}{40{,}25} = 20$

Cette suite arithmétique possède 20 termes

V. Quelle est la raison de la suite arithmétique telle que : $u_5 = 13{,}8$ et $u_{17} = 30{,}6$.

$\begin{cases} u_5 = u_1 + 4r \\ u_{17} = u_1 + 16r \end{cases} \qquad \begin{cases} 13{,}8 = u_1 + 4r & ① \\ 30{,}6 = u_1 + 16r & ② \end{cases}$

$① - ② : -16{,}8 = -12r \Rightarrow r = \dfrac{16{,}8}{12} = 1{,}4$

VI. Quelle est la raison de la suite arithmétique telle que : $u_1 = 6$ et $S_{40} = 2190$.

$S_{40} = 2190 = 40\left(\dfrac{u_1 + u_{40}}{2}\right)$ et $u_{40} = u_1 + 39r = 6 + 39r$

$2190 = 40\left(\dfrac{6 + (6 + 39r)}{2}\right) \Rightarrow 2190 = 40\left(\dfrac{12 + 39r}{2}\right) \Rightarrow 2190 = 20\,(12 + 39r) \Rightarrow 2190 = 240 + 780r \Rightarrow$

$780r = 2190 - 240 = 1950 \Rightarrow r = \dfrac{1950}{780} = 2{,}5$

VII. Déterminer le nombre de termes de la suite arithmétique telle que $u_1 = 25$; $r = 2$; $S_n = 1881$.

$S_n = 1881 = n\left(\dfrac{u_1 + u_n}{2}\right)$ et $u_n = u_1 + (n - 1) \times r \Rightarrow u_n = 25 + (n - 1) \times 2 = 25 + 2n - 2 = 23 + 2n$

$1881 = n\left(\dfrac{25 + (23 + 2n)}{2}\right) \Rightarrow 1881 = n(24 + n) \Rightarrow 1881 = 24n + n^2 \Rightarrow n^2 + 24n - 1881 = 0$

On résout l'équation du 2^{nd} degré : $a = 1$, $b = 24$ et $c = -1881$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 24^2 - 4 \times 1 \times -1881 = 576 + 7524 = 8100$

$n_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-24 - 90}{2} = -57 \quad n_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-24 + 90}{2} = 33$

n doit être positif donc le nombre de termes de la suite arithmétique est de 33

Vérification : $S_{33} = 33\left(\dfrac{25 + 25 + (32 \times 2)}{2}\right) = 33 \times \left(\dfrac{114}{2}\right) = 1881$

VIII. Une somme de 90 000 € est répartie entre trois personnes. Les parts forment une suite arithmétique de premier terme 20 000 €. Quelles sont les trois parts ?

$u_1 = 20000$; $u_2 = u_1 + r = 20000 + r$; $u_3 = u_2 + r = u_1 + 2r = 20000 + 2r$

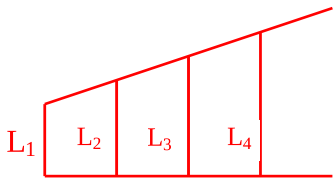
$u_1 + u_2 + u_3 = 90000 \Rightarrow 20000 + (20000 + r) + (20000 + 2r) = 90000 \Rightarrow 60000 + 3r = 90000 \Rightarrow$

$3r = 90000 - 60000 = 30000 \Rightarrow r = \dfrac{30000}{3} = 10000$

Les trois parts sont $u_1 = 20\,000$ € ; $u_2 = 30\,000$ € ; $u_3 = 40\,000$ €

IX. Pour soutenir un plan incliné, on place sur le sol des étais à intervalle régulier. Les mesures en cm, des longueurs des cinq premiers étais sont :

$L_1 = 40$; $L_2 = 43,8$; $L_3 = 47,6$; $L_4 = 51,4$; $L_5 = 55,2$.



Les mesures rangées dans cet ordre forment-elles une suite arithmétique ?

$L_5 - L_4 = 55,2 - 51,4 = 3,8$

$L_4 - L_3 = 51,4 - 47,6 = 3,8$

$L_3 - L_2 = 47,6 - 43,8 = 3,8$

$L_2 - L_1 = 43,8 - 40 = 3,8$

Toutes les différences sont égales donc les mesures forment bien une suite arithmétique de **1^{er} terme $L_1 = 40$ et de raison $r = 3,8$**

Quelle est la mesure de la longueur du $10^{ème}$ étai (si les longueurs forment une suite arithmétique) ?

$L_{10} = L_1 + 9r = 40 + 9 \times 3,8 = 74,2$ cm

Quelle est la mesure, en cm, de la longueur totale de l'ensemble des dix étais ?

$S_{10} = 10\left(\dfrac{L_1 + L_{10}}{2}\right) = 10 \times \left(\dfrac{40 + 74,2}{2}\right) = 10 \times 57,1 = 571$ cm

X. Un employé a un salaire de 6 500 F mensuel en Janvier 1997. Son salaire est augmenté de 15 F chaque mois.

Calculer le salaire du mois de Décembre 1997.

Soit u_1 le salaire de Janvier 1997 ($u_1 = 6500$), la raison sera $r = 15$. Le salaire de Décembre 1997 sera u_{12}.

$u_{12} = u_1 + 11r = 6500 + 11 \times 15 = 6500 + 165 = 6665$ F

Calculer le salaire de l'année 1997.

Le salaire de l'année 1997 sera S_{12} avec $S_{12} = 12\left(\dfrac{u_1 + u_{12}}{2}\right) = 12\left(\dfrac{6500 + 6665}{2}\right) = 78\,990$ F

② Suites Géométriques

Approche :

0,5 ; 2 ; 8 ; 32 ; 128
12 ; 18 ; 27 ; 40,5
} sont des suites géométriques

Définition :

Une suite numérique est dite géométrique si chaque terme, autre que le premier, s'obtient en multipliant le terme précédent par un nombre donné constant appelé raison de la suite et noté "q".

$$\boxed{u_n = u_{n-1} \times q}$$

Comment reconnaître si une suite est géométrique ?

Il faut calculer tous les rapports $\frac{u_n}{u_{n-1}}$, u_{n-1} et u_n étant deux termes consécutifs. Si tous les rapports sont égaux, alors la suite est géométrique (ces rapports donnent la raison q).

Calcul du terme de rang "n" d'une suite géométrique :

Pour n entier supérieur ou égal à deux :

$u_2 = u_1 \times q$

$u_3 = u_2 \times q = u_1 \times q^2$

$$\boxed{u_n = u_1 \cdot q^{n-1}}$$

Somme S_k des "k" premiers termes d'une suite géométrique ?

Soit la suite géométrique de premier terme u_1 et de raison q :

$$u_1\ ;\ u_2\ ;\ u_3\ ;\ u_4\ ;\ \dots\ ;\ u_{n-1}\ ;\ u_n\ .$$

S_k la somme des k premiers termes : $S_k = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_{k-1} + u_k$

Multiplions S_k par q : $S_k \times q = u_1 \times q + u_2 \times q + u_3 \times q + u_4 \times q + \dots + u_{k-1} \times q + u_k \times q$

Retranchons membre à membre les deux égalités précédentes :

$S_k - S_k \times q = u_1 - u_1 \times q + u_2 - u_2 \times q + u_3 - u_3 \times q + u_4 - u_4 \times q + \dots + u_{k-1} - u_{k-1} \times q + u_k - u_k \times q$

Or : $u_1 \times q = u_2$; $u_2 \times q = u_3$; $u_3 \times q = u_4$; $u_{k-1} \times q = u_k$

Donc : $S_k - S_k \times q = u_1 - u_k \times q \Rightarrow S_k (1 - q) = u_1 - (u_1 \times q^{k-1}) \times q \Rightarrow S_k (1 - q) = u_1 - u_1 \times q^k$

$$\boxed{S_k = u_1 \frac{1 - q^k}{1 - q}}$$

Exercices :

I. Calculer le 10ème terme et le 25ème terme d'une suite géométrique de premier terme $u_1 = 0{,}8$ et de raison $q = 2$.

$u_n = u_1 \times q^{n-1}$

$\boldsymbol{u_{10}} = u_1 \times q^{10-1} = 0{,}8 \times 2^{10} = \mathbf{409{,}6}$ et $\boldsymbol{u_{25}} = u_1 \times q^{25-1} = 0{,}8 \times 2^{24} = \mathbf{13\ 421\ 772{,}8}$

II. Dans une suite géométrique à raison positive, on a $u_3 = 3{,}84$ et $u_5 = 9{,}8304$. Calculer la raison et le premier terme de cette suite.

$u_5 = u_1 \times q^2 \Rightarrow q^2 = \dfrac{u_5}{u_3} \Rightarrow \mathbf{q} = \sqrt{\dfrac{u_5}{u_3}} = \sqrt{\dfrac{9{,}8304}{3{,}84}} = \sqrt{2{,}56} = \mathbf{1{,}6}$ (ou $-1{,}6$)

$u_3 = u_1 \times q^2 \Rightarrow \boldsymbol{u_1} = \dfrac{u_3}{q^2} = \dfrac{3{,}84}{2{,}56} = \mathbf{1{,}5}$

III. Dans une suite géométrique où $u_1 = 10$ et $q = 1{,}02$, on donne $u_n = 10{,}8243216$. Calculer "n"

$u_n = u_1 \times q^{n-1} \Rightarrow 10{,}8243216 = 10 \times 1{,}02^{n-1} \Rightarrow 1{,}02^{n-1} = \dfrac{10{,}8243216}{10} \Rightarrow 1{,}02^{n-1} = 1{,}08243216.$

2 méthodes :

On calcule les puissances de 1,02 jusqu'à ce que l'on trouve 1,08243216 :

$1{,}02^1 = 1{,}02$; $1{,}02^2 = 1{,}0404$; $1{,}02^3 = 1{,}061208$; $1{,}02^4 = 1{,}08243216$ donc $n - 1 = 4 \Rightarrow \mathbf{n = 5}$

On utilise les logarithmes (solution préférable d'un point de vue mathématique) :

On utilise la propriété : $\log a^n = n \log a$

$\log 1{,}02^{n-1} = \log 1{,}08243216 \Rightarrow (n - 1) \times \log 1{,}02 = \log 1{,}08243216 \Rightarrow n - 1 = \dfrac{\log 1{,}08243216}{\log 1{,}02} = 4 \Rightarrow \mathbf{n = 5}$

IV. Le prix de vente d'une brochure est augmenté de 8% chaque fin d'année.

① Sachant qu'à sa création son prix de vente P_1 est égal à 4 €, déterminer le prix de vente P_2 de la deuxième année et les prix de vente P_3 et P_4 (on arrondira à 10^{-2} € près).

$P_2 = P_1 + 8\%$ de $P_1 \Rightarrow P_2 = 4 + \dfrac{4 \times 8}{100} = 4{,}32$ € ; $P_3 = P_2 + 8\%$ de $P_2 \Rightarrow P_3 = 4{,}32 + \dfrac{4{,}32 \times 8}{100} = 4{,}67$ €

$P_4 = P_3 + 8\%$ de $P_3 \Rightarrow P_4 = 4{,}67 + \dfrac{4{,}67 \times 8}{100} = 5{,}04$ €

$\dfrac{P_4}{P_3} = \dfrac{4{,}32}{4} = 1{,}08$; $\dfrac{P_3}{P_2} = \dfrac{4{,}67}{4{,}32} = 1{,}08$; $\dfrac{P_2}{P_1} = \dfrac{5{,}04}{4{,}67} = 1{,}08$ donc P_1, P_2, P_3 et P_4 forment une suite géométrique de 1er terme $P_1 = 4$ et de raison $q = 1{,}08$.

② Exprimer P_n et calculer P_n pour $n = 10$

$P_n = P_1 \times q^{n-1} = 4 \times 1{,}08^{n-1} \Rightarrow P_{10} = 4 \times 1{,}08^{10-1} = 4 \times 1{,}08^9 = 8$ €

V. Un loyer annuel est de 18 000 F en 1993, il augmente de 2% par an.

① Calculer les loyers des années 1997, 1998 et 2002.

Soit L_1 le loyer de l'année 1993, le loyer de l'année 1997 sera L_5, le loyer de l'année 1998 sera L_6, le loyer de l'année 1997 sera L_{10}.

Les loyers forment une suite géométrique de 1er terme $L_1 = 18000$ et de raison $q = 1{,}02$ $(1 + 0{,}2)$.

$L_5 = L_1 \times 1{,}02^{5-1} = 18000 \times 1{,}02^4 = 19483{,}78$; $L_6 = L_1 \times 1{,}02^{6-1} = 18000 \times 1{,}02^5 = 19873{,}45$; $L_{10} = L_1 \times 1{,}02^{10-1} = 18000 \times 1{,}02^9 = 21511{,}67$

② Calculer la somme dépensée en loyer de 1993 à 2002 inclus.

La somme dépensée en loyer de 1993 à 2002 correspond à S_{10} : $S_{10} = L_1 \left(\dfrac{1-q^{10}}{1-q}\right) = 18000 \times \left(\dfrac{1-1{,}02^{10}}{1-1{,}02}\right)$

$S_{10} = 197\ 094{,}98$ F

Calculer le premier terme de la suite géométrique telle que $q = 0{,}25$ et $S_5 = 959{,}0625$.

$S_5 = u_1 \left(\dfrac{1-q^5}{1-q}\right) \Rightarrow S_5 = u_1 \left(\dfrac{1-0{,}25^5}{1-0{,}25}\right) = 959{,}0625 \Rightarrow \boldsymbol{u_1} = \dfrac{959{,}0625}{1{,}332} = \mathbf{720}$

VI. Combien y a t il de suites géométriques définies par $u_1 = 11$ et $u_3 = 44$?

$u_2 = u_1 \times q$; $u_3 = u_2 \times q = u_1 \times q^2 \Rightarrow q^2 = \dfrac{u_3}{u_1} = \dfrac{44}{11} = 4 \Rightarrow q = \pm\sqrt{4} = \pm 2$; Il y a donc 2 suites qui sont définies par $u_1 = 11$ et $u_3 = 44$:

u_1 = 11 et q = –2 ; u_1 = 11 et q = 2

VII. Un article de Sciences et Avenir de Mars 1990 intitulé "Des bactéries envahissantes" donne l'information suivante concernant les salmonelles :

"Les salmonelles se multiplient très vite : leur nombre double toutes les vingt minutes."

Soit N_0 le nombre initial de salmonelles. En vous référant à l'information précédente, exprimer en fonction de N_0 le nombre de bactéries présentes aux instants suivants :

$t_1 = 20$ min ; $t_2 = 40$ min ; $t_3 = 1$ h ; $t_4 = 2$ h ; $t_5 = 3$ h.

(D'après Bac Pro 1992)

A $t_1 = 20$ min, on a $N_1 = N_0 \times 2$

A $t_2 = 40$ min (2×20), on a $N_2 = N_1 \times 2 = N_0 \times 4 = N_0 \times 2^2$

A $t_3 = 1$ h $= 60$ min (3×20), on a $N_3 = N_2 \times 2 = N_0 \times 8 = N_1 \times 2^3$

A $t_4 = 2$ h $= 120$ min (6×20), on a $N_6 = N_0 \times 2^6$

A $t_5 = 3$ h $= 180$ min (9×20), on a $N_9 = N_0 \times 2^9$

VIII. La production P_1 d'une chaîne de fabrication au bout de la première semaine de fonctionnement est $P_1 = 200\ 000$ unités. On envisage d'augmenter la production de 3% par semaine pendant un certain nombre de semaines.

① Montrer que les productions successives à la fin de chaque semaine forment une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison *q*.

$P_2 = P_1 + 3\%$ de $P_1 \Rightarrow P_2 = 200000 + \dfrac{200000 \times 3}{100} = 206000$

$P_3 = P_2 + 3\%$ de $P_2 \Rightarrow P_3 = 206000 + \dfrac{206000 \times 3}{100} = 212180$

$\dfrac{P_2}{P_1} = \dfrac{206000}{200000} = 1{,}03$

$\dfrac{P_3}{P_2} = \dfrac{212180}{206000} = 1{,}03$

Les rapports sont égaux, la suite est donc géométrique de 1er terme P_1 = 200000 et de raison q = 1,03

② Calculer la production au cours de la 4ème semaine.

$\mathbf{P_4} = P_1 \times q^{4-1} = 200000 \times 1{,}03^{4-1} = \mathbf{218\ 545}$

③ Calculer la production totale après quatre semaines de fonctionnement.

$S_4 = P_1 \left(\dfrac{1-q^4}{1-q}\right) = 200000 \times \left(\dfrac{1-1{,}03^4}{1-1{,}03}\right) = \mathbf{836725}$

④ La production totale après quatre semaines de fonctionnement aurait-elle été identique si on avait décidé une augmentation de 6 100 unités par semaine ?

Si on décide une augmentation de 6100 unités par semaine la suite devient une suite arithmétique de 1^er^ terme $P_1 = 200000$ et de raison $r = 6100$.

$S_4 = 4 \times \left(\frac{P_1 + P_4}{2}\right)$ avec $P_4 = 200000 + (4 - 1) \times 6100 = 218300$

$S_4 = 4 \times \left(\frac{200000 + 218300}{2}\right) = 4 \times 209150 = 836600.$

Dans ce cas la production pour 4 semaines est inférieure.