

PUISSANCES

Généralités sur les puissances

La puissance $n^{\text{ième}}$ d'un nombre est le produit de n facteurs égaux à ce nombre.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

n est appelé **l'exposant** : c'est lui qui indique le nombre de facteurs.

On lit : " a puissance n " ou " a exposant n ".

a^2 se lit " a au carré" ou " a puissance 2".

a^3 se lit " a au cube" ou " a puissance 3".

Propriétés des puissances :

Puissances d'un produit :

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n \qquad (2 \times 5)^3 = 2^3 \times 5^3$$

Puissances d'un quotient :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3^4}{5^4}$$

Puissances d'une puissance :

$$(a^n)^m = a^{n \times m} \qquad (5^2)^3 = 5^{2 \times 3} = 5^6$$

Produit de puissances d'un même nombre :

$$a^n \times a^m = a^{n+m} \qquad 5^4 \times 5^3 = 5^{4+3} = 5^7$$

Quotient de puissances d'un même nombre :

1° cas : $m > n$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \frac{3^7}{3^4} = 3^{7-4} = 3^3$$

2° cas : $m = n$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = a^0 = 1 \qquad \frac{3^5}{3^5} = 3^{5-5} = 3^0 = 1$$

3° cas : m < n

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

$$\frac{2^5}{2^7} = 2^{5-7} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0,25$$

Puissances de 10

L'exposant est positif :

$$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times 10 \times \dots \times 10}_n = 1 \underbrace{000\dots0}_n$$

n fois le facteur 10 n zéros

$$10^5 = 100\ 000 \quad ; \quad 10^2 = 100 \quad ; \quad 10^0 = 1$$

L'exposant est négatif :

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \frac{1}{1\ 0000\dots0} = 0, \underbrace{000\dots01}_n$$

n rangs

$$10^{-2} = 0,01 \quad ; \quad 10^{-5} = 0,000\ 01 \quad ; \quad 10^{-6} = 0,000\ 001$$

Notation scientifique d'un nombre

Elle consiste à écrire tous les nombres sous la forme :

$a \cdot 10^n$

avec $1 \leq |a| < 10$

Exemples :

$$342,5 = 3,425 \cdot 10^2$$

Le point (symbole de la multiplication) est indispensable. C'est le seul cas où il peut être utilisé entre 2 nombres.

$$0,00127 = 1,27 \cdot 10^{-3}$$

$$342,5 \times 0,00127 = 3,425 \cdot 10^2 \times 1,27 \cdot 10^{-3} = 434,975 \cdot 10^{-1} = 4,34975 \cdot 10^1$$

$$\frac{6,27 \cdot 10^9 \times 9,2 \cdot 10^{-3}}{5,5 \cdot 10^4 \times 7,8 \cdot 10^5} = \frac{6,27 \times 9,2 \times 10^{9+(-3)}}{5,5 \times 7,8 \times 10^{4+5}} = \frac{57,684 \cdot 10^6}{42,9 \cdot 10^9} = \frac{5,7684 \cdot 10^7}{4,29 \cdot 10^{10}} = \frac{5,7684}{4,29} \cdot 10^{7-10}$$

$$= 1,345 \cdot 10^{7-10} = 1,345 \cdot 10^{-3} (= 0,001\ 345)$$

Utilisation des puissances de 10 pour les multiples et sous-multiples d'unités

Multiples		Sous-multiples	
Préfixes	Coefficient multiplicateur	Préfixes	Coefficient multiplicateur
déca (da)	10^1	déci (d)	10^{-1}
hecto (h)	10^2	centi (c)	10^{-2}
kilo (k)	10^3	milli (m)	10^{-3}
méga (M)	10^6	micro (μ)	10^{-6}
giga (G)	10^9	nano (n)	10^{-9}
téra (T)	10^{12}	pico (p)	10^{-12}

Exercices Puissances

1) Effectuer :

$$(xy)^3 = x^3 y^3 ; (x^2 y)^5 = x^{2 \times 5} y^5 = x^{10} y^5$$

$$(ab)^4 = a^4 b^4 ; (y^6 x^{-2})^3 = y^{6 \times 3} x^{-2 \times 3} = y^{18} x^{-6}$$

$$a \times a^2 = a^{1+2} = a^3 ; x^2 \times x^4 = x^{2+4} = x^6$$

$$A = a^2 \times b^3 \times a^{-3} \times b^{-2} = a^{2+(-3)} \times b^{3+(-2)} = a^{-1} \times b^1 = \frac{b}{a}$$

$$B = a^2 \times b^{-3} \times (a^4 b)^3 = a^2 \times b^{-3} \times a^{4 \times 3} \times b^3 = a^{2+12} \times b^{-3+3} = a^{14} \times b^0 = a^{14}$$

$$\text{Calculer : } A \times B = \frac{b}{a} \times a^{14} = a^{14-1} \times b = a^{13} \times b$$

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{b}{a}}{a^{14}} = \frac{b}{a} \times \frac{1}{a^{14}} = \frac{b}{a^{1+14}} = \frac{b}{a^{15}}$$

2) Calculer les nombres suivants :

$$(-2)^4 = 2^4 = 16 ; (-3)^5 = -3^5 = -243$$

$$\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3 = 27 ; \frac{(-4)^2}{(-4)^3} = (-4)^{2-3} = (-4)^{-1} = -\frac{1}{4}$$

$$[(0,5)^2]^3 = 0,5^{2 \times 3} = 0,5^6 = 0,015625 ; \text{ ----- } = \text{ ----- } = \text{ ----- }$$

$$\frac{2 \times 5 \times (2^3)^4}{5^2 \times 2^4 \times 2^7} = \frac{2 \times 2^{3 \times 4} \times 5}{5^2 \times 2^{4+7}} = \frac{2^{1+12} \times 5}{5^2 \times 2^{11}} = \frac{2^{13} \times 5}{5^2 \times 2^{11}} = 2^{13-11} \times 5^{1-2} = 2^2 \times 5^{-1} = \frac{4}{5} = 0,8$$

3) Ecrire en notation scientifique les nombres suivants :

$$30\,000 = 3 \cdot 10^4 ; 120\,000 = 1,2 \cdot 10^5$$

$$2\,456\,000 = 2,456 \cdot 10^6 ; 700\,000 = 7 \cdot 10^5$$

$$0,000\,45 = 4,5 \cdot 10^{-4} ; 0,002\,54 = 2,54 \cdot 10^{-3}$$

$$0,25 = 2,5 \cdot 10^{-1} ; 0,000\,000\,0087 = 8,7 \cdot 10^{-9}$$

4) Ecrire sous forme d'un nombre :

$$1,4 \cdot 10^4 = 140\,000 ; 2 \cdot 10^6 = 2\,000\,000$$

$$4,5 \cdot 10^5 = 450\,000 ; 5,8 \cdot 10^3 = 5\,800$$

$$6,5 \cdot 10^{-4} = 0,000\,65 ; 8,546 \cdot 10^{-8} = 0,000\,000\,085\,46$$

$$2,24 \cdot 10^{-5} = 0,000\,022\,4 ; 5 \cdot 10^{-3} = 0,005$$