Etudes des Fonctions

1) ***Repères - Coordonnées d'un point***

Les repères :

L'axe horizontal s'appelle l'**axe des abscisses**.
L'axe vertical s'appelle l'**axe des ordonnées**.

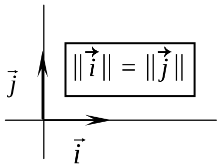
On pose $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$

(O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) est un repère du plan, O est appelé ***origine*** du repère,

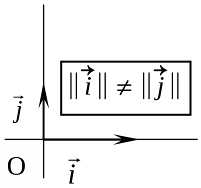
$\vec{i}$ ***est le vecteur unitaire*** de l'axe des **abscisses**,

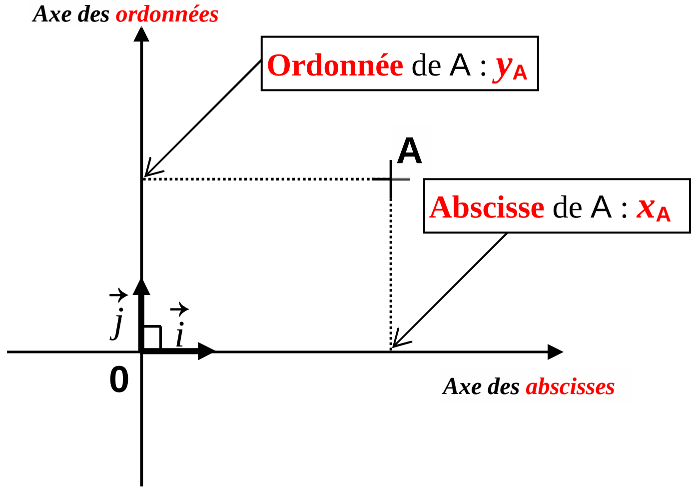
$\vec{j}$ ***est le vecteur unitaire*** de l'axe des **ordonnées**.

- orthonormé ou orthonormal



- orthogonal





Coordonnées d'un point :

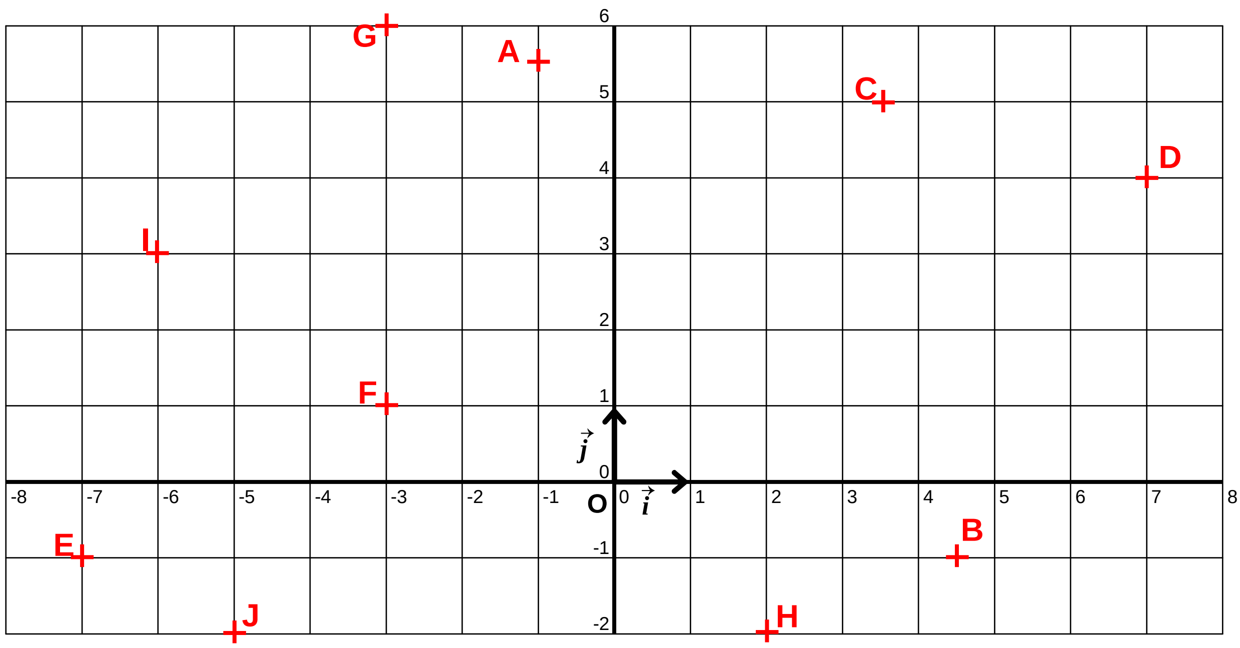
Un point A est repéré par ses coordonnées :

- ***son abscisse :***
- ***son ordonnée :***

On écrit : A (x_A ; y_A) ou A $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$

Placer les points A, B, C, D, E, F, G, H, I et J ; dont on donne les coordonnées :

A (–1 ; 5,5) B (4,5 ; –1) C (3,5 ; 5) D (7 ; 4) E (–7 ; –1)
F (–3 ; 1) G (–3 ; 6) H (–2 ; –2) I (–6 ; 3) J (–5 ; –2)



2) *Définition d'une fonction*

Une fonction *f* est définie sur un intervalle I.

Elle associe à chaque nombre *x* de I, un nombre réel *unique* appelé *image de x et noté f(x)*

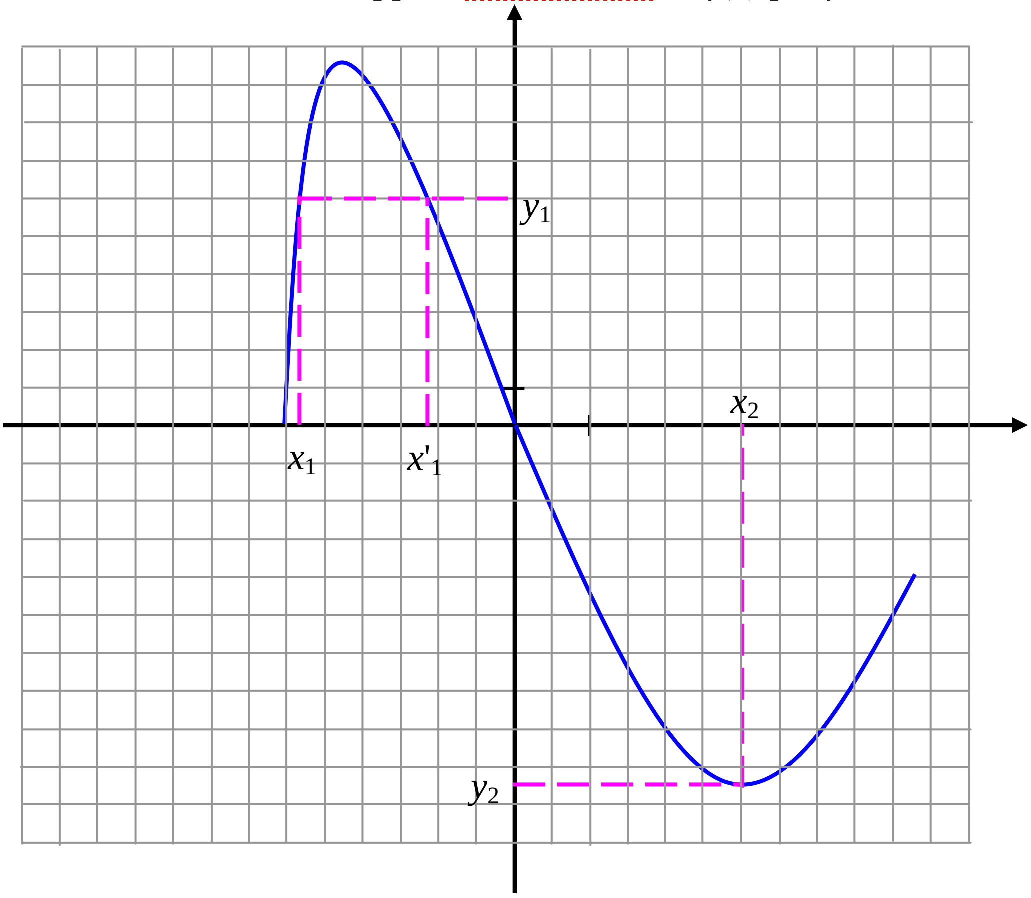
Images - Antécédents :

Un réel x n'admet qu'une image et une seule, ou n'en a pas.

Dans l'autre sens, ***x est appelé antécédent de y***. Un réel *y* peut n'avoir aucun antécédent, un ou plusieurs.

Le graphique d'une fonction se caractérise donc par le fait qu'à une abscisse (x), ne peut correspondre au plus qu'une seule ordonnée (y).

$f(x)$ est appelé ***l'image de x*** par f.
x est appelé ***l'antécédent*** de $f(x)$ par f.



x_1 a une image y_1 ; x'_1 a une image y_1 ; x_2 a une image y_2

y_1 a deux antécédents x_1 et x'_1

y_2 a un antécédent x_2

Ensemble de définition :

L'ensemble de définition d'une fonction, noté $\mathcal{D}_f$, est constitué de tous les nombres réels qui admettent une image par la fonction ; c'est à dire de ***tous les nombres pour lesquels il est possible d'effectuer les opérations décrites dans cette fonction***. Si pour certaines valeurs de la variable x, il y a des impossibilités d'opérations (dénominateur nul, racine carrée de nombres négatifs,...) alors toutes ces valeurs doivent être éliminées dans l'étude de la fonction.

Trouvez le domaine de définition des fonctions suivantes :

Expression algébrique	Valeurs de la variable x n'ayant pas d'image	Ensemble de définition $\mathcal{D}_f$
$f(x) = -x + 5$	aucune	$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{3}{x}$	$x = 0$	$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x-2}$	$x - 2 < 0 \Rightarrow x < 2$	$\mathcal{D}_f = [2 ; +\infty[$
$f(x) = x^2 - 6$	aucune	$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{x-5}{2x+4}$	$2x + 4 = 0 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -\frac{4}{2} = -2$	$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{-2\}$

Représentation graphique :

Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction f est l'ensemble des points M de coordonnées (x ; $f(x)$).

Pour construire la représentation graphique d'une fonction :

on recherche des couples de valeurs M (x ; $f(x)$), en calculant la valeur de f pour une valeur de x fixée dans le domaine de définition de f ; on peut alors présenter les résultats dans un tableau de valeurs.

on place les points de coordonnées M (x ; $f(x)$) dans un repère (x sur l'axe des abscisses et $f(x)$ porté sur l'axe des ordonnées).

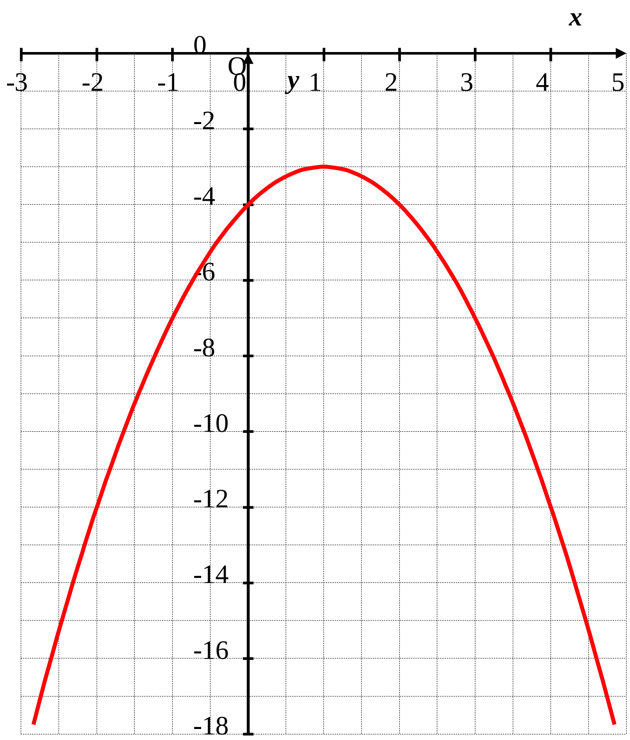
Ex : Compléter le tableau pour la fonction définie par $f(x) = -x^2 + 2x - 4$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-19	-12	-7	-4	-3	-4	-7	-12	-19

Pour savoir si un point A (x_A ; y_A) est sur la courbe $\mathcal{C}_f$, on vérifie que :

$x_A \in D_f$ et $f(x_A) = y_A$

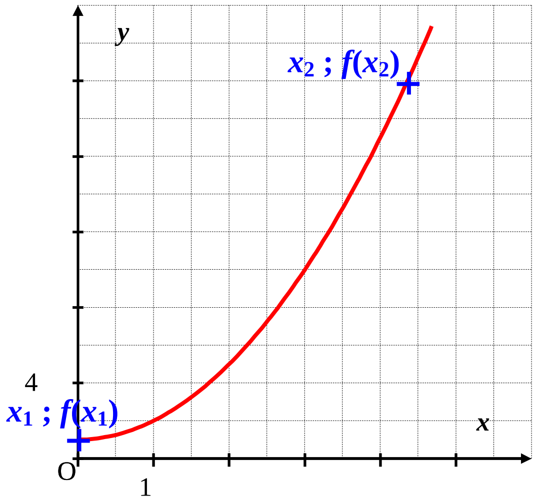
les coordonnées du point A doivent vérifier l'équation de $\mathcal{C}_f$



3) ***Sens de variations d'une fonction***

Fonction croissante.

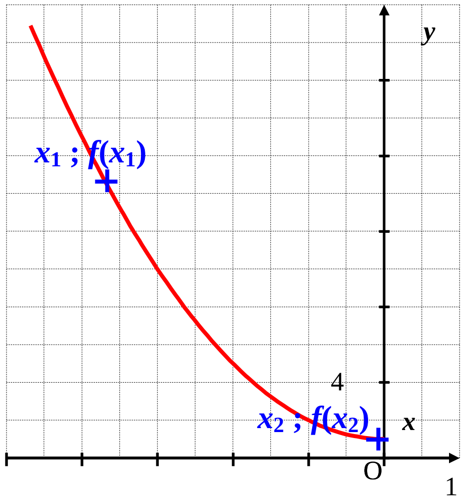
On dit qu'une fonction *f* est croissante sur [a ; b] si, quels que soient les nombres x_1 et x_2 de l'intervalle [a ; b] tels que $\boldsymbol{x_1 < x_2}$**, alors** $\boldsymbol{f(x_1) < f(x_2)}$. (En d'autres termes, on constate que la courbe ***monte*** quand *x* augmente, c'est-à-dire lorsqu'on se déplace de gauche à droite.)



$x_1 < x_2$
$f(x_1) < f(x_2)$
Sur l'intervalle $[x_1 ;\ x_2]$
la fonction *f* est
croissante

Fonction décroissante.

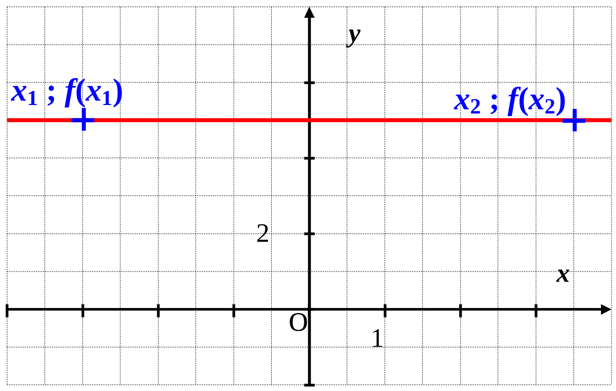
On dit qu'une fonction *f* est décroissante sur [a ; b] si, quels que soient les nombres x_1 et x_2 de l'intervalle [a ; b] tels que $\boldsymbol{x_1 < x_2}$**, alors** $\boldsymbol{f(x_1) > f(x_2)}$. (En d'autres termes, on constate que la courbe ***descend*** quand *x* augmente, c'est-à-dire lorsqu'on se déplace de gauche à droite.)



$x_1 < x_2$
$f(x_1) > f(x_2)$
Sur l'intervalle $[x_1 ;\ x_2]$
la fonction *f* est
décroissante

Fonction constante.

On dit qu'une fonction *f* est constante sur [a ; b] si, quels que soient les nombres x_1 et x_2 de l'intervalle [a ; b] tels que $\boldsymbol{x_1 < x_2}$**, alors** $\boldsymbol{f(x_1) = f(x_2)}$. (En d'autres termes, on constate que la courbe est ***plane*** quand *x* augmente, c'est-à-dire lorsqu'on se déplace de gauche à droite.)

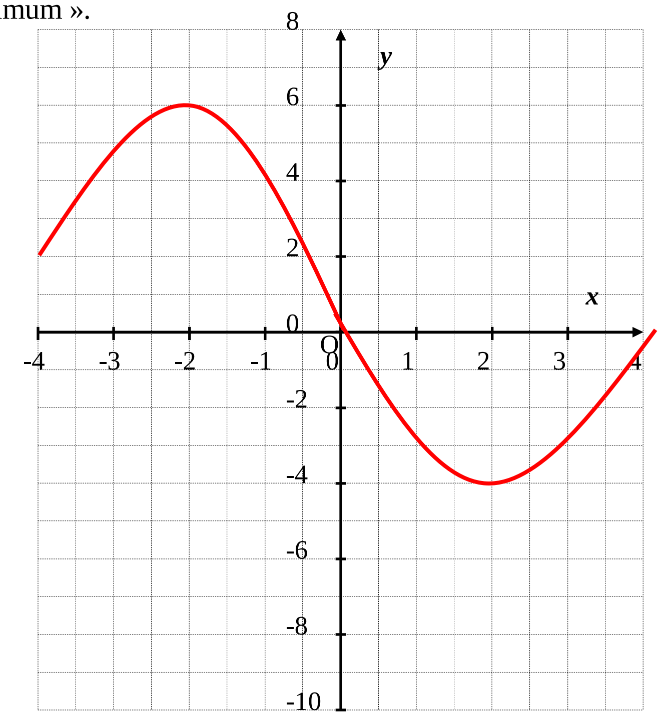


$x_1 < x_2$
$f(x_1) = f(x_2)$
Sur l'intervalle $[x_1 ;\ x_2]$
la fonction *f* est
constante

4) ***Extremums d'une fonction***

Maximum : L'ordonnée, du point ***le plus haut*** de la représentation graphique de la fonction *f* sur l'intervalle I, est appelée « maximum ».

Minimum : L'ordonnée, du point ***le plus bas*** de la représentation graphique de la fonction *f* sur l'intervalle I, est appelée « minimum ».



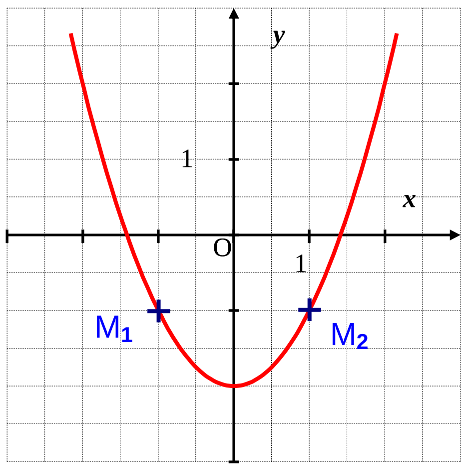
Sur la représentation ci-dessus, la fonction admet, sur l'intervalle [-4 ; 4] :

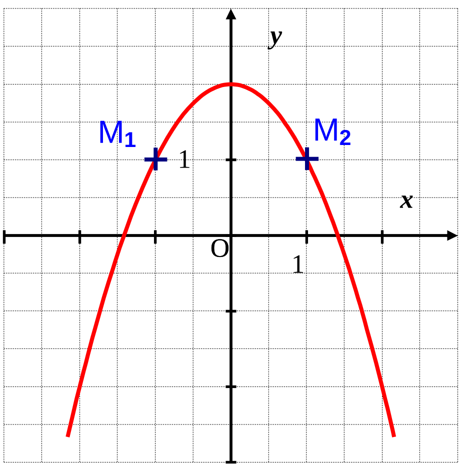
- Un maximum, 6, atteint pour $x = -2$;
- Un minimum, –4, atteint pour $x = 2$.

5) ***Parité d'une fonction***

Fonctions paires

Une fonction est paire si : Si $f(-x) = f(x)$, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (y'Oy)





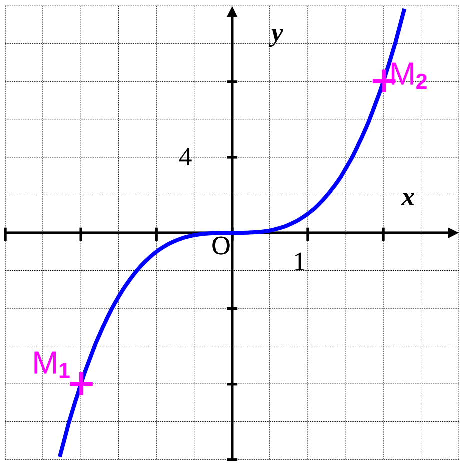
M_1 (-1 ; -1) M_2 (1 ; -1) M_1 (-1 ; 1) M_2 (1 ; 1)

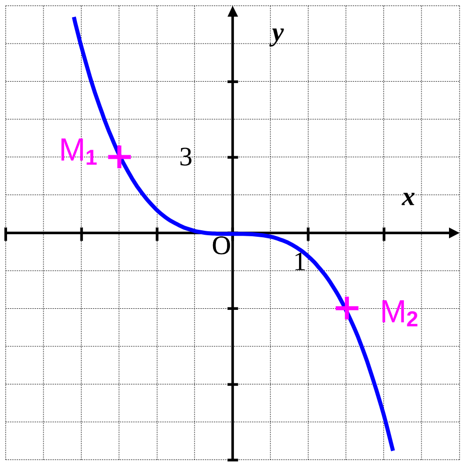
Comparer x_1 et x_2 : $x_1 = -x_2$

Comparer $f(x_1)$ et $f(x_2)$: $f(x_1) = f(x_2)$

Fonctions impaires

Une fonction est impaire si : Si $f(-x) = -f(x)$, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère : O(0;0)





M_1 (–5 ; –3) **M_2** (5 ; 3) **M_1** (–4 ; 4) **M_2** (4 ; –4)

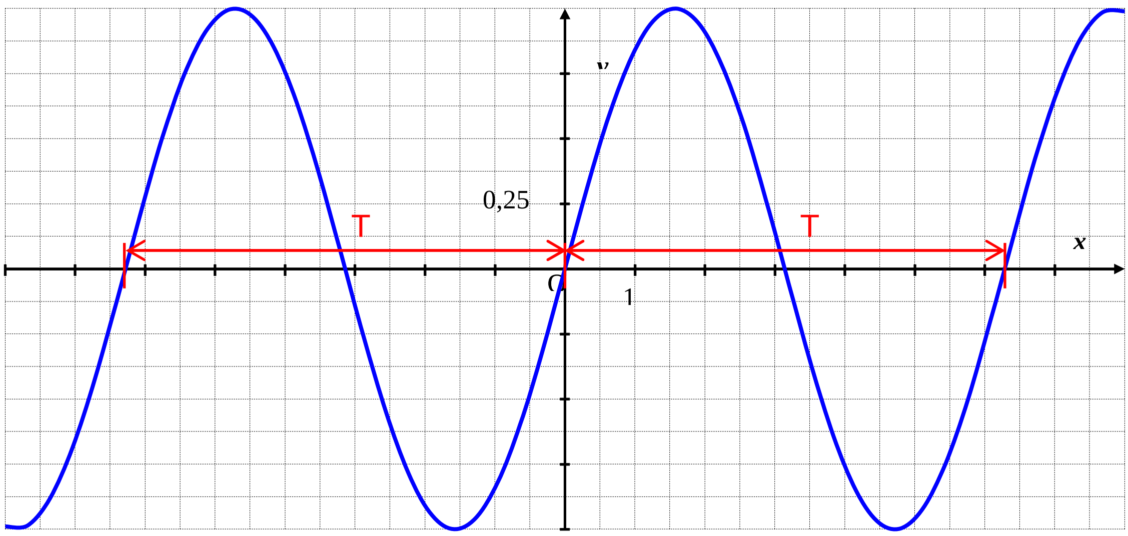
Comparer x_1 et x_2 : $x_1 = -x_2$

Comparer $f(x_1)$ et $f(x_2)$: $f(x_1) = -f(x_2)$

6) ***Périodicité d'une fonction***

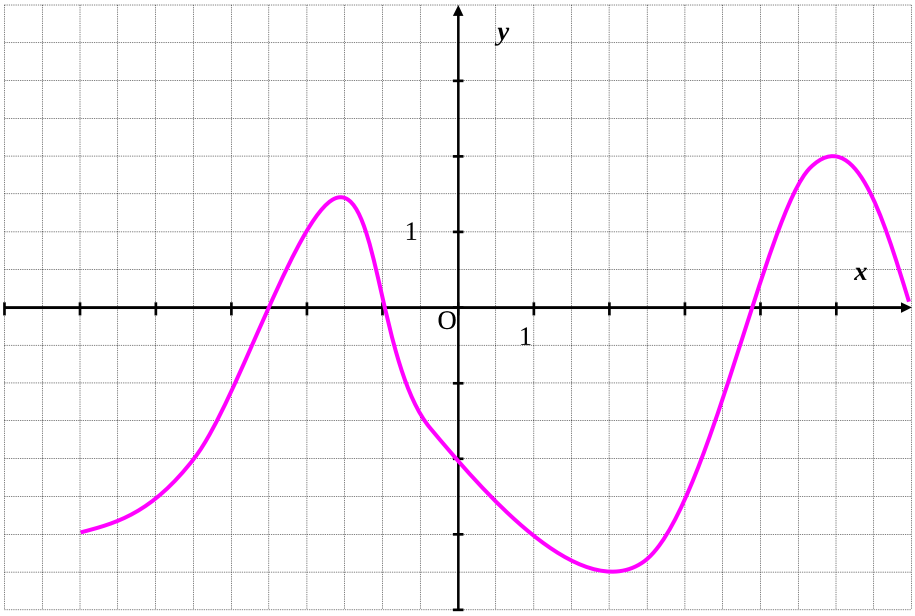
Un phénomène est périodique s'il ***se reproduit IDENTIQUE A LUI-MEME au bout d'un intervalle (de temps, de distance …) appelé PERIODE***.

Soit une fonction f définie sur $\mathbf{D_f}$. f est périodique de période T si, pour tout x de $\mathbf{D_f}$: $f(x + \mathrm{T}) = f(x)$



7) ***Tableau de variations***

Le tableau de variations permet de mettre en évidence les variations de la courbe représentative de la fonction à l'aide de flèches $\nearrow$; $\searrow$; $\longrightarrow$. Ce type de tableau possède 2 lignes : sur la première, on fait figurer les valeurs de x pour lesquelles la courbe subit un changement de comportement (ou de direction) et sur la seconde, on fait figurer les variations de la fonction, par des flèches, ***en précisant à chaque changement de comportement, la valeur de la fonction***.



x	-5		$-1,5$		2		5		6
$f(x)$	-3	↗	$1,5$	↘	$-3,5$	↗	2	↘	0

Déterminer la valeur de x pour laquelle f admet un maximum : $x = 5$

Déterminer le minimum de cette fonction : $f(x) = -3,5$ pour $x = 2$