Fonctions numériques

1) Comment définit-on une fonction ?

On appelle ainsi tout procédé qui, à un nombre réel x (appelé la variable) fait correspondre **au plus un réel *y*** (***y est appelé image de x***).

Par une formule... Ex : "f(x) = 5x + 3" est la fonction affine qui, à tout nombre x, associe le nombre 5x + 3.

Grâce à la calculatrice... Ex : la touche $\boxed{x^2}$ permet d'associer, à tout nombre x, le nombre $x^2 = x \times x$.

Par une relation de dépendance, rencontrée dans certaines études...Ex :

- En sciences expérimentales : en un lieu donné, la pression est fonction de l'altitude.

- En géométrie : Soit un carré de côté x. Quel est son périmètre, exprimé en fonction de x ?

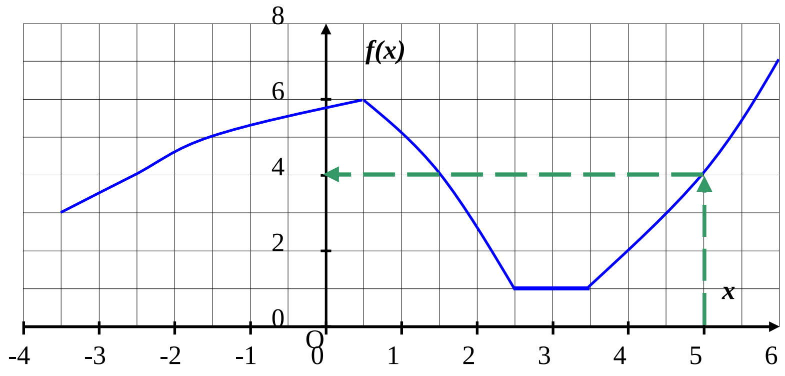
Par une représentation graphique : La principale qualité d'un graphique est de rendre, d'un seul coup d'œil, une vision générale claire de la situation étudiée (ce que ne ferait pas une formule mathématique) : croissance ou décroissance, maximum ou minimum, intervalles rendant des valeurs égales ou supérieures à une valeur donnée…
Son principal défaut, le plus souvent, est son imprécision. Sauf données explicitement indiquées, un graphique ne donne généralement pas des valeurs exactes, mais des valeurs approchées. Ce qui, dans bien des situations courantes, est largement suffisant.

> Définition générale d'une fonction numérique : Une fonction f définie sur un intervalle, associe, à tout nombre x de cet intervalle, un nombre et un seul noté $f(x)$

2) Image et antécédent(s) d'une valeur par une fonction

Un réel x admet donc une image et une seule, ou n'en a pas.
Dans l'autre sens, ***x est appelé antécédent de y***. Un réel y peut n'avoir aucun antécédent, un ou plusieurs.
Le graphique d'une fonction se caractérise donc par le fait qu'à une abscisse (x), ne peut correspondre au plus qu'une seule ordonnée (y).

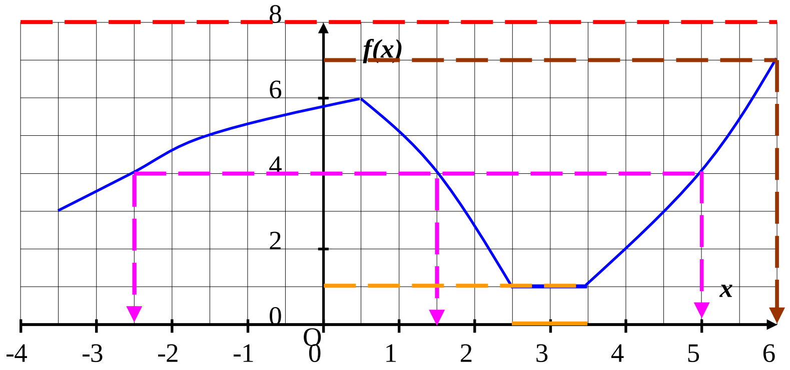
Ex :



L'image de 5 par la fonction ci-contre est 4 :

$f(5) = 4$

Par contre, un nombre donné quelconque (recherché cette fois sur le graphique sur l'axe des ordonnées) peut avoir de 0 à "une infinité" d'antécédents par une fonction. Ex :



- 8 n'a pas d'antécédent par la fonction *f* ci-contre.
- 7 a un seul antécédent par *f*, c'est 6 : f(6) = 7.
- 4 a trois antécédents par *f*, ce sont –2, 2 et 5 : *f*(–2) = 4, *f*(2) = 4 et *f*(5) = 4.
- 1 a une infinité d'antécédents par *f* : ce sont tous les nombres compris entre 3 et 4.

L'usage a consacré l'écriture $y = f(x)$.   *f* est la fonction ; *x* est la **variable** ; *y* est l'image de *x* ; *x* est alors un **antécédent** de *y*.

3) L'ensemble de définition

L'ensemble de définition d'une fonction, noté $\mathcal{D}_f$, est constitué de tous les nombres réels qui admettent une image par la fonction ; c'est à dire de tous les nombres pour lesquels il est possible d'effectuer les opérations décrites dans cette fonction. Si pour certaines valeurs de la variable *x*, il y a des impossibilités d'opérations (dénominateur nul, racine carré de nombres négatifs,...) alors toutes ces valeurs doivent être éliminées dans l'étude de la fonction.

Expression algébrique	Valeurs de la variable *x* n'ayant pas d'image	Ensemble de définition $\mathcal{D}_f$
$f(x) = 2x + 3$	aucune	$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{2}{x}$	$x = 0$	$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x+1}$	$x + 1 < 0 \Rightarrow x < -1$	$\mathcal{D}_f = [-1 \,;\, +\infty[$
$f(x) = x^2 + 4$	aucune	$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{2x+4}{x-5}$	$x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$	$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{5\}$

Plutôt que d'étudier les fonctions sur un ensemble infini de nombres ($\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$,$\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$), on peut aborder l'étude d'une fonction sur un intervalle limité. C'est **l'intervalle d'étude** noté **I = [… ; …].** Cet intervalle est souvent donné ou doit être trouvé dans certains problèmes de la vie courante ou géométriques. Attention néanmoins aux valeurs de la variable qui n'ont pas d'images par la fonction dans cet intervalle.

4) Extremums d'une fonction

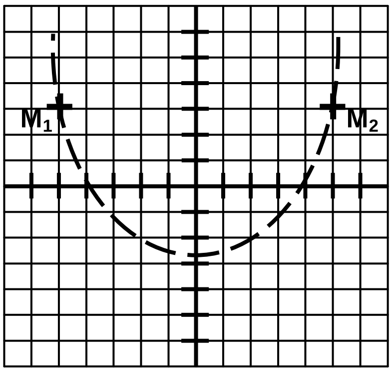
Sur l'exemple précédent, la fonction admet, sur l'intervalle [-3 ; 6] :

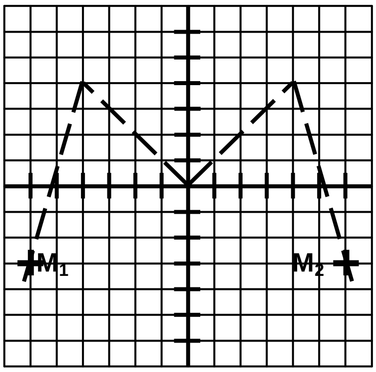
- Un maximum, 7, atteint pour *x* = 6 ;
- Un minimum, 1, atteint pour tous les nombres compris entre 3 et 4.

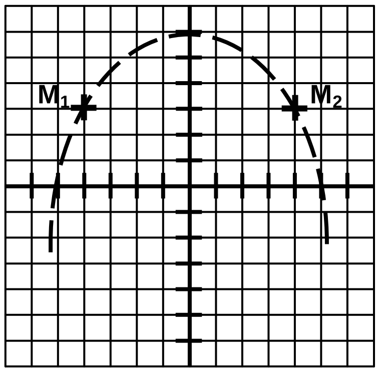
Un extremum d'une fonction est un minimum ou un maximum.

4) Parité d'une fonction

a. Fonctions paires







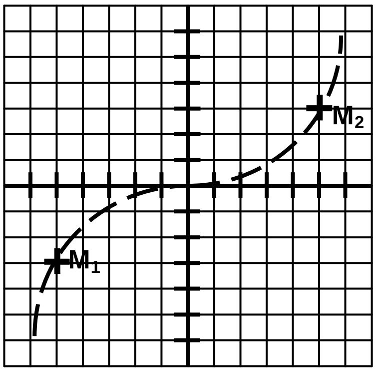
M_1 $(-5 ; 3)$ **M_2** $(5 ; 3)$ **M_1** $(-6 ; -3)$ **M_2** $(6 ; 3)$ **M_1** $(-4 ; 3)$ **M_2** $(4 ; 3)$

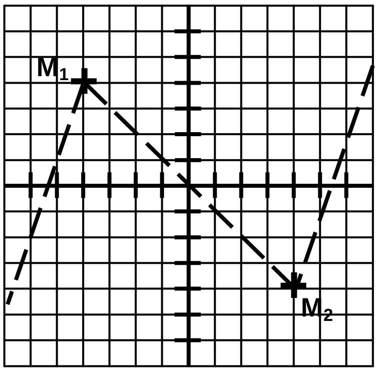
Comparer x_1 et x_2 : $x_1 = -x_2$

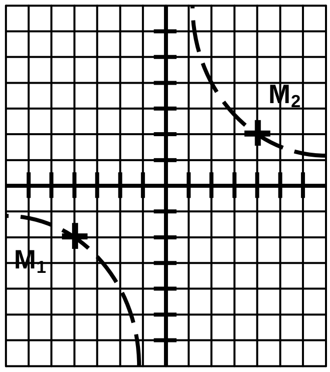
Comparer $f(x_1)$ et $f(x_2)$: $f(x_1) = f(x_2)$

Une fonction est paire si : Si $f(-x) = f(x)$, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées $(y'Oy)$

b. Fonctions impaires







M_1 $(-5 ; -3)$ **M_2** $(5 ; 3)$ **M_1** $(-4 ; 4)$ **M_2** $(4 ; -4)$ **M_1** $(-4 ; -2)$ **M_2** $(4 ; 2)$

Comparer x_1 et x_2 : $x_1 = -x_2$

Comparer $f(x_1)$ et $f(x_2)$: $f(x_1) = -f(x_2)$

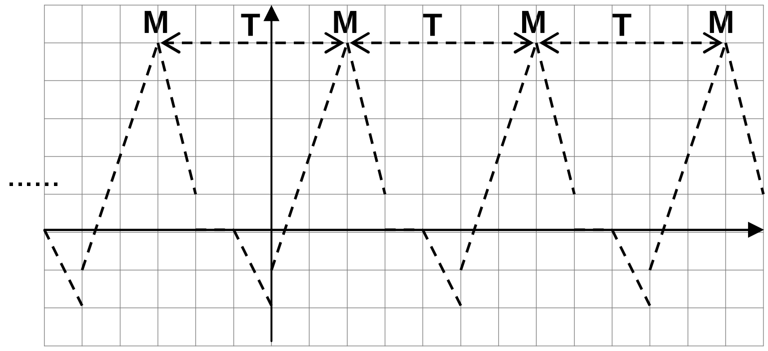
Une fonction est impaire si : Si $f(-x) = -f(x)$, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère : O(0;0)

5) Périodicité d'une fonction

Un phénomène est périodique s'il se reproduit IDENTIQUE A LUI-MEME au bout d'un intervalle (de temps, de distance …) appelé PERIODE.

Soit une fonction f définie sur $\mathcal{D}_f$. f est périodique de période T si, pour tout x de $\mathcal{D}_f$:

$$f(x + T) = f(x)$$



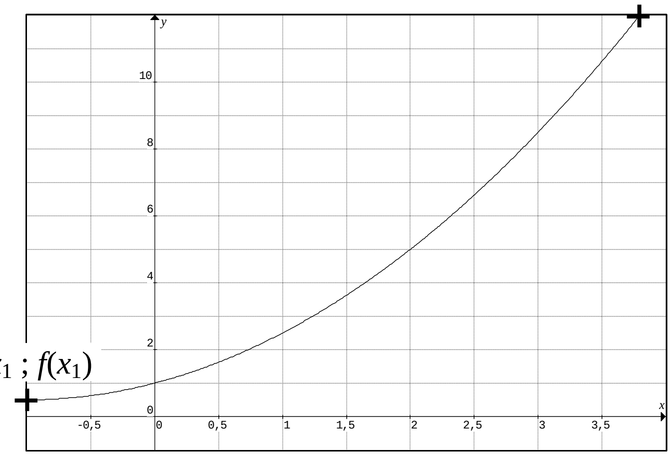
T est appelé période

$x_2 = x_1 + T$; $x_3 = x_2 + T$; $x_4 = x_3 + T$

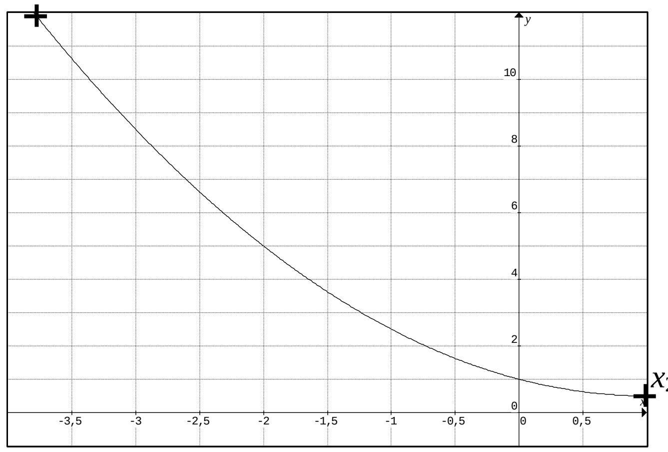
$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = ...$

et $f(x_1 + T) = f(x_2 + T) = f(x_3 + T)$

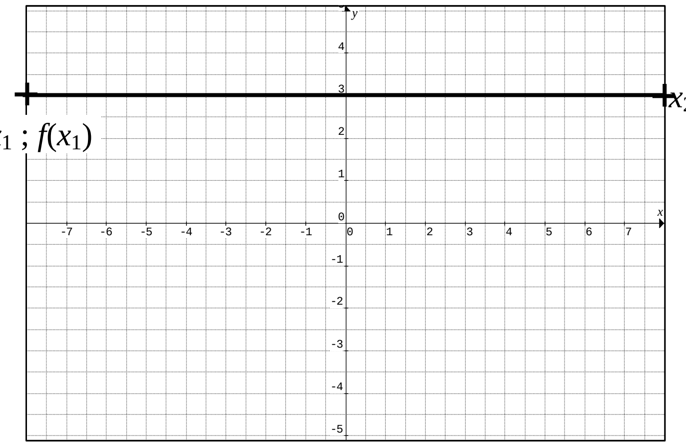
6) Sens de variation d'une fonction



$x_1 < x_2$
$f(x_1) < f(x_2)$
Sur l'intervalle $[x_1 ; x_2]$
la fonction f est
croissante



$x_1 < x_2$
$f(x_1) > f(x_2)$
Sur l'intervalle $[x_1 ; x_2]$
la fonction f est
décroissante



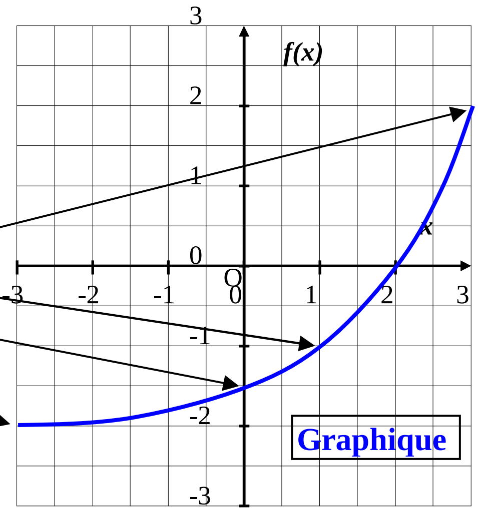
$x_1 < x_2$
$f(x_1) = f(x_2)$
Sur l'intervalle $[x_1 ; x_2]$
la fonction f est
constante

8) Tableau de valeurs et représentation graphique

Pour une fonction $f(x)$ définie sur l'intervalle I = [a ; b]

x	a					b
$f(x)$ ou y	f(a)					f(b)
points	(a ; f(a))					(b ; f(b))

Tableau de valeurs



9) Sens de variation d'une fonction

Donner le tableau de variation de la fonction f dont voici sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$?

La fonction f est croissante sur les intervalles :

……………………………………………

……………………………………………

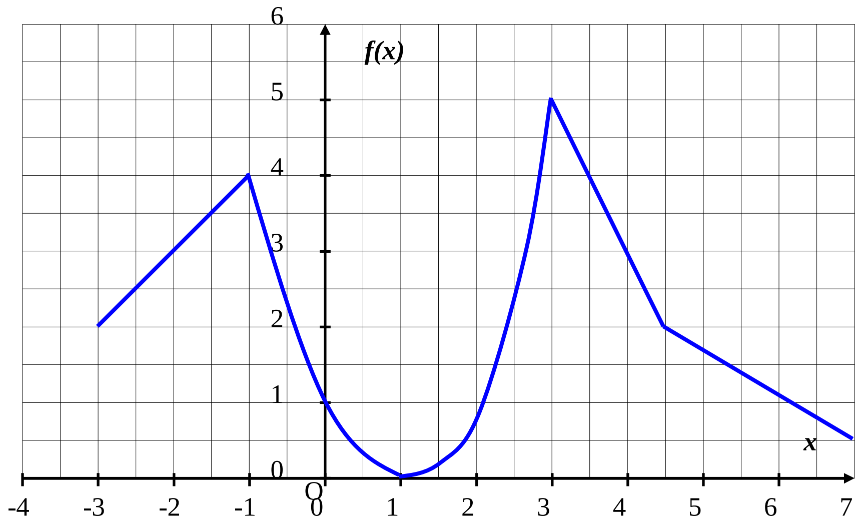
……………………………………………....

La fonction f est décroissante sur les intervalles :

……………………………………………....

……………………………………………....

……………………………………………....



Le tableau de variation sera alors :

x	–3		–1		1		3		6
$f(x)$	2	↗	4	↘	0	↗	5	↘	1

Déterminer la valeur de x pour laquelle f admet un maximum : $x = 3$

Déterminer le minimum de cette fonction : $f(x) = 0$ pour $x = 1$