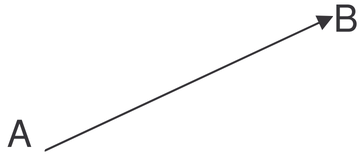
VECTEURS - PRODUIT SCALAIRE

❶ *Quelques rappels sur les vecteurs*

Définition - Propriétés

Deux points A et B pris dans cet ordre (et distincts) représentent un vecteur noté $\overrightarrow{AB}$.



Le point A est l'origine, le point B est l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

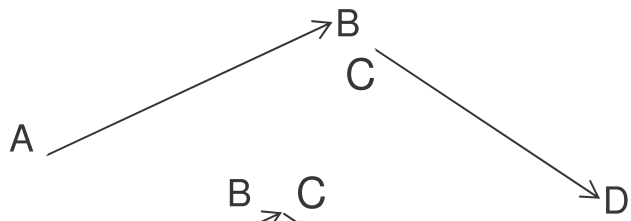
Les éléments du vecteur $\left(\overrightarrow{AB}\right)$ sont :

- **sa direction, la direction de la droite (AB) ;**
- **sa norme, la mesure de la longueur AB (une unité de longueur étant choisie) : $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$**
- **son sens, le sens de A vers B**

Remarque : On appelle vecteur nul, un vecteur de longueur nulle, on note ce vecteur $\vec{0}$ (l'origine et l'extrémité sont confondues).

On dit que 2 vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ s'ils ont les mêmes éléments, c'est à dire :

- **les droites (AB) et (CD) sont parallèles ou confondues ;**
- **le même sens ;**
- **la même norme**

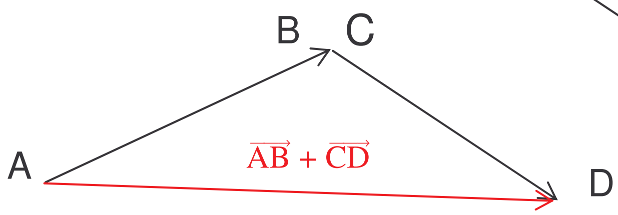


Opérations sur les vecteurs

On dit que l'addition est **commutative**

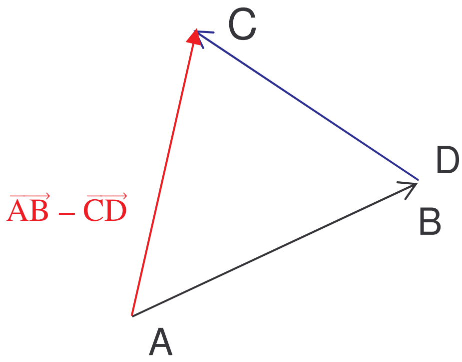
$\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} \right)$

Effectuer la somme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$



Effectuer la soustraction $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$

$-\overrightarrow{CD}$ est de sens opposé à $\overrightarrow{CD}$



La somme de 2 vecteurs ne dépend pas de l'ordre. La somme de plusieurs vecteurs ne dépend pas des regroupements effectués.

Si $\vec{U} + \vec{V} = \vec{0}$, on dit que les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont opposés : $\vec{U} = -\vec{V}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ constituent la relation de Chasles pour les vecteurs

Multiplication d'un vecteur par un réel

Soit un nombre réel k et un vecteur $\overrightarrow{U}\left(\overrightarrow{U} \neq \vec{0}; k \neq 0\right)$**. Les vecteurs** $\overrightarrow{U}$ et $k\overrightarrow{U}$ **ont la même direction, le même sens si k > 0 (des sens opposés si k < 0) et :**

$$\left\|k\overrightarrow{U}\right\| = |k| \times \left\|\overrightarrow{U}\right\|$$

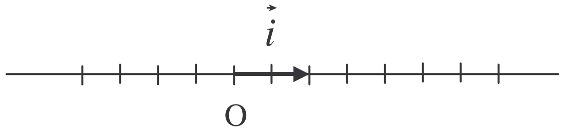
Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs non nuls sont dits colinéaires s'ils ont la même direction.

Vecteur unitaire

Sur l'axe $x'x$ de repère (O,I), nous désignerons par $\vec{i}$ le vecteur $\overrightarrow{OI}$ et nous l'appellerons le **vecteur unitaire** de l'axe. Par la suite, nous dirons aussi bien le repère(O,I) que le repère $\left(0\,;\vec{i}\right)$.

Mesure algébrique d'un vecteur sur un axe



Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a le même sens que $\vec{i}$, et **AB = 2,5 donc :**

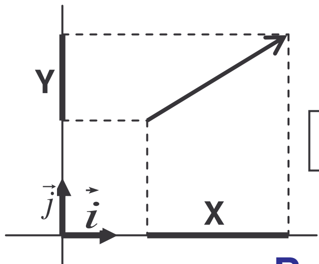
$$\overrightarrow{AB} = 2{,}5\,\vec{i} = \overline{AB}\,.\vec{i}$$

Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ est de sens opposé à $\vec{i}$ et CD = 3,5 donc :

$$\overrightarrow{CD} = -\,3{,}5\,\vec{i} = \overline{CD}\,.\vec{i}$$

Sur un axe de repère (O,I), le vecteur $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ **est le vecteur unitaire de l'axe.**

Tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ **porté par l'axe est colinéaire à** $\vec{i}$ **et** $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\,.\vec{i}$

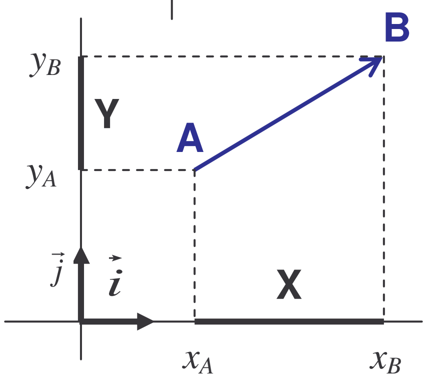


$\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 1$

Coordonnées d'un vecteur dans le plan

Dans un repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ **du plan, tout vecteur** $\overrightarrow{U}$ **peut s'écrire d'une manière unique sous la forme :**

$$\boxed{\overrightarrow{U} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}}$$



$\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 1$

Les réels x et y sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{U}$

Si le vecteur $\overrightarrow{AB}$ **est donné par les coordonnées (x_A ; y_A) et (x_B ; y_B) de ses extrémités, alors :**

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \left(x_B - x_A\right)\vec{i} + \left(y_B - y_A\right)\vec{j}}$$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Si $\overrightarrow{U} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ et $\overrightarrow{V} = x'\,\vec{i} + y'\,\vec{j}$, alors :

$\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V} = (x + x')\,\vec{i} + (y + y')\,\vec{j}$ et $k.\overrightarrow{U} = (kx)\,\vec{i} + (ky)\,\vec{j}$

$$\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix} \quad k\,\overrightarrow{U}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$$

Norme d'un vecteur dans le plan

Si dans le repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) **le vecteur** $\overrightarrow{U}$ **s'écrit X** $\vec{i}$ **+ Y** $\vec{j}$, alors :

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{U}\right\| = \sqrt{X^2 + Y^2}}$$

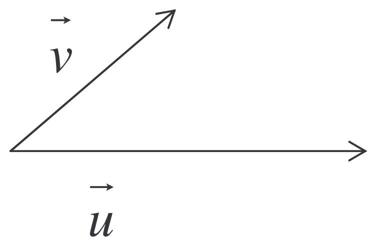
❷ *Produit scalaire dans le plan*

➡ Définition - Généralités

On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ <u>le nombre réel</u> noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ tel que :

si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ alors



$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \times \cos\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)}$$

ou

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{u}\right\|^2 - \left\|\vec{v}\right\|^2\right]}$$

Remarques :

$\vec{u}\cdot\vec{v}$ se lit " vecteur $\vec{u}$ scalaire vecteur $\vec{v}$ ".

Le travail d'une force $\vec{F}$ provoquant un déplacement AB est donné par la relation :

W = F x AB cos α où $\alpha = \left(\vec{F}, \overrightarrow{AB}\right)$.

On dit que W est le produit scalaire de $\vec{F}$ et $\overrightarrow{AB}$, on note : $W = \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$

➡ Propriétés du produit scalaire

- si $\vec{u}\cdot\vec{v} \rangle 0$ alors l'angle $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ est aigu ;
- si $\vec{u}\cdot\vec{v} \langle 0$ alors l'angle $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ est obtus ;
- le carré scalaire d'un vecteur est égal au carré de sa norme. $\vec{u}\cdot\vec{u} = \vec{u}^{\,2} = \left\|\vec{u}\right\|^2$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors $\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = 90°$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \times \cos 90° = 0$$

Si deux vecteurs non nuls sont orthogonaux, alors leur produit scalaire est nul et réciproquement.

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0}$$

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et le réel a :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$$
$$\left(a\,\vec{u}\right)\cdot\vec{v} = a\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$$
$$\vec{u}\cdot\left(a\,\vec{v}\right) = a\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$$

Le produit scalaire ne dépend pas de l'ordre des vecteurs

➡ Expression analytique du produit scalaire

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad\quad$ $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

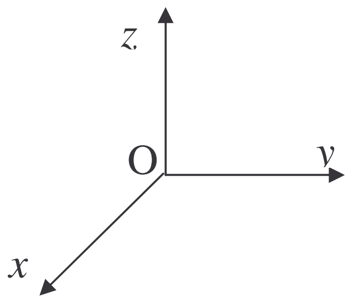
$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \left(x\vec{i} + y\vec{j}\right).\left(x'\vec{i} + y'\vec{j}\right) = xx'\,\vec{i}\,.\,\vec{i} + xy'\,\vec{i}\,.\,\vec{j} + yx'\,\vec{j}\,.\,\vec{i} + yy'\,\vec{j}\,.\,\vec{j}$$

or $\vec{i}\,.\,\vec{j} = \vec{j}\,.\,\vec{i} = 0$ et $\left(\vec{i} \perp \vec{j}\right)$ et $\vec{i}\,.\,\vec{i} = \vec{j}\,.\,\vec{j} = \left\|\vec{i}\right\|^2 = \left\|\vec{j}\right\|^2 = 1$

Donc :

$$\boxed{\vec{u}\,.\,\vec{v} = x\,x' + y\,y'}$$

❸ *Vecteurs et produit scalaire dans l'espace*



$\vec{i}$ vecteur unitaire sur $(x\,x')$

$\vec{j}$ vecteur unitaire sur $(y\,y')$

$\vec{k}$ vecteur unitaire sur $(z\,z')$

$\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ est un repère orthonormal de l'espace, dans la pratique, on le note $\left(O\,;\vec{x}\,;\vec{y}\,;\vec{z}\right)$

Les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ tel que $\vec{u} = X\,\vec{i} + Y\,\vec{j} + Z\,\vec{k}$ seront notées : $\vec{u}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$.

La norme de $\vec{u}$ sera $\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$.

L'expression analytique du produit scalaire $\vec{u}\,.\,\vec{v} = XX' + YY' + ZZ'$