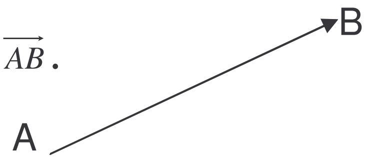
VECTEURS - PRODUIT SCALAIRE

❶ *Quelques rappels sur les vecteurs*

Définition - Propriétés

Deux points A et B pris dans cet ordre (et distincts) représentent un vecteur noté ....



Le point A est ...., le point B est .... du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Les éléments du vecteur $\left(\overrightarrow{AB}\right)$ sont :

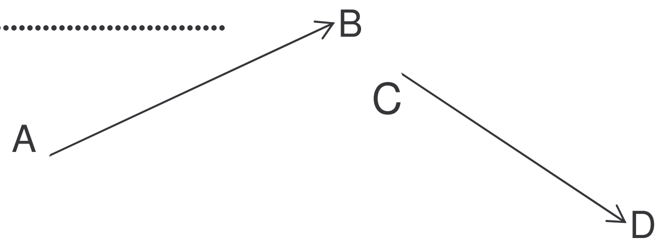
- **... ;**
- **$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$: ....**
- **...**

Remarque : On appelle vecteur nul, un vecteur ...., on note ce vecteur .... (l'origine et l'extrémité sont ....).

On dit que 2 vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ s'ils ont les mêmes éléments, c'est à dire :

- **... ;**
- **... ;**
- **...**

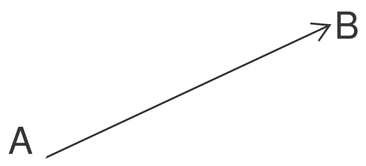
Opérations sur les vecteurs



On dit que l'addition est **...........................**

$\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} \right)$

Effectuer la somme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$



Effectuer la soustraction $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$

$-\overrightarrow{CD}$ vecteur opposé à $\overrightarrow{CD}$ (même direction, même norme, sens opposé)

La somme de 2 vecteurs ne dépend pas .... La somme de plusieurs vecteurs ne dépend pas ....

Si $\vec{U} + \vec{V} = \vec{0}$, on dit que les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont .... : $\vec{U}$ = ...

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ constituent la .... pour les vecteurs

➩ *Multiplication d'un vecteur par un réel*

Soit un nombre réel k et un vecteur $\vec{U}\left(\vec{U} \neq \vec{0}; k \neq 0\right)$**. Les vecteurs** $\vec{U}$ et $k\vec{U}$ **ont ...., le même sens si k .... 0 (des sens opposés si k .... 0) et :**

$$\left\|k\vec{U}\right\| = |k| \times \left\|\vec{U}\right\|$$

➩ *Vecteurs colinéaires*

Deux vecteurs non nuls sont dits colinéaires s'ils ont ....

➩ *Vecteur unitaire*

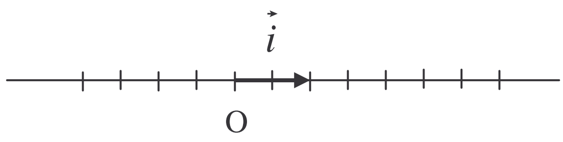
Sur l'axe $x'x$ de repère (O, I), nous désignerons par $\vec{i}$ le vecteur $\overrightarrow{OI}$ et nous l'appellerons le **................ ....** de l'axe. Par la suite, nous dirons aussi bien le repère (O,I) que le repère $\left(0\,;\vec{i}\right)$. $\left\|\vec{i}\right\| = 1$.

➩ *Mesure algébrique d'un vecteur sur un axe*

Sur un axe de repère (O,I), le vecteur $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ **est le vecteur unitaire de l'axe.**

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a le ***même sens*** que $\vec{i}$, et **AB = 2,5 donc :**

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\,.\vec{i} =$$



Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ est de ***sens opposé*** à $\vec{i}$ et CD = 3,5 donc :

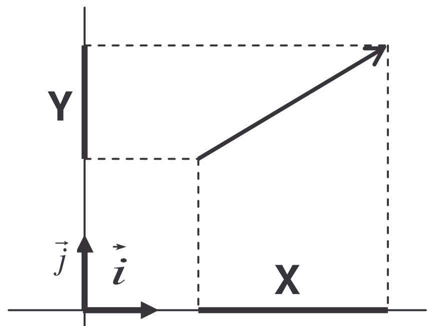
$$\overrightarrow{CD} = \overline{CD}\,.\vec{i} =$$

Tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ **porté par l'axe est colinéaire à** $\vec{i}$ **et** $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\,.\vec{i}$

➩ *Coordonnées d'un vecteur dans le plan*

Dans un repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ **du plan, tout vecteur** $\vec{U}$ **peut s'écrire d'une manière unique sous la forme :**

$$\boxed{\vec{U} = \ldots\vec{i} + \ldots\vec{j}}$$



Les réels *x* et *y* sont les coordonnées du vecteur $\vec{U}$

Si le vecteur $\overrightarrow{AB}$ **est donné par les coordonnées (x_A ; y_A) et (x_B ; y_B) de ses extrémités, alors :**

$\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 1$

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \ldots\ldots\ldots\ldots\,\vec{i} + \ldots\ldots\ldots\ldots\,\vec{j}}$$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Si $\vec{U} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ et $\vec{V} = x'\,\vec{i} + y'\,\vec{j}$, alors : $\boxed{\vec{U} + \vec{V} = (x+x')\,\vec{i} + (y+y')\,\vec{j} \text{ et } k.\vec{U} = (kx)\,\vec{i} + (ky)\,\vec{j}}$

➩ *Norme d'un vecteur dans le plan*

Si dans le repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ **le vecteur** $\vec{U}$ **s'écrit** $X\,\vec{i} + Y\,\vec{j}$, alors :

$$\boxed{\left\|\vec{U}\right\| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

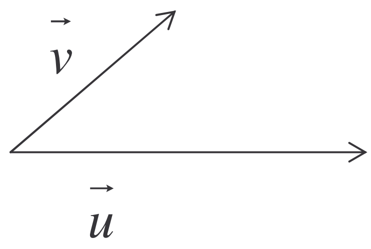
❷ Produit scalaire dans le plan

➲ Définition - Généralités

On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre réel noté $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ tel que :

si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}\,.\,\vec{v} = ...$

si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ alors



$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \qquad\qquad}$$

ou

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \qquad\qquad\qquad\qquad}$$

Remarques :

$\vec{u}\,.\,\vec{v}$ se lit " .... ".

Le travail d'une force $\vec{F}$ provoquant un déplacement AB est donné par la relation :

W = F x AB cos α où $\alpha = \left(\vec{F}, \overrightarrow{AB}\right)$.

On dit que W est le produit scalaire de $\vec{F}$ et $\overrightarrow{AB}$, on note : $W = \vec{F}\,.\,\overrightarrow{AB}$

➲ Propriétés du produit scalaire

- si $\vec{u}\,.\,\vec{v} \rangle 0$ alors l'angle $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ est .... ;
- si $\vec{u}\,.\,\vec{v} \langle 0$ alors l'angle $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ est .... ;
- le carré scalaire d'un vecteur est égal au carré de sa norme. $\vec{u}\,.\,\vec{u} = \vec{u}^{\,2} = \left\|\vec{u}\right\|^2$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors $\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = 90°$

$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \times \cos 90° = ...$

Si deux vecteurs non nuls sont orthogonaux, alors leur produit scalaire est nul et réciproquement.

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\,.\,\vec{v} = ...}$$

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et le réel a :

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = ...$$

$$\left(a\,\vec{u}\right).\vec{v} = ...$$

$$\vec{u}\,.\left(a\,\vec{v}\right) = ...$$

Le produit scalaire ne dépend pas ....

➡ Expression analytique du produit scalaire

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan

$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ $\quad\quad$ $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

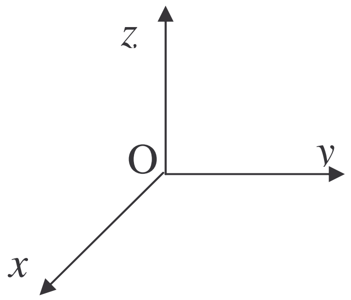
$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \left(x\vec{i} + y\vec{j}\right).\left(x'\,\vec{i} + y'\,\vec{j}\right) = xx'\,\vec{i}\,.\,\vec{i} + xy'\,\vec{i}\,.\,\vec{j} + yx'\,\vec{j}\,.\,\vec{i} + yy'\,\vec{j}\,.\,\vec{j}$$

or $\vec{i}\,.\,\vec{j} = \vec{j}\,.\,\vec{i} = \ldots\ldots\ldots$ car $\left(\vec{i} \quad \vec{j}\right)$ et $\vec{i}\,.\,\vec{i} = \vec{j}\,.\,\vec{j} = \left\|\vec{i}\right\|^2 = \left\|\vec{j}\right\|^2 = \ldots\ldots.$

Donc :

$$\boxed{\vec{u}\,.\,\vec{v} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

❸ *Vecteurs et produit scalaire dans l'espace*



$\vec{i}$ vecteur unitaire sur $(x\,x')$

$\vec{j}$ vecteur unitaire sur $(y\,y')$

$\vec{k}$ vecteur unitaire sur $(z\,z')$

$\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ est un repère orthonormal de l'espace, dans la pratique, on le note $\left(O\,;\vec{x}\,;\vec{y}\,;\vec{z}\right)$

Les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ tel que $\vec{u} = X\,\vec{i} + Y\,\vec{j} + Z\,\vec{k}$ seront notées : $\vec{u}\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$.

La norme de $\vec{u}$ sera $\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$.

L'expression analytique du produit scalaire $\vec{u}\,.\,\vec{v} = XX' + YY' + ZZ'$