Equations du 1er degré

1) Equation du premier degré à une inconnue

Une égalité dans laquelle figure un nombre inconnu, noté par une lettre, s'appelle une **équation**.
Résoudre l'équation, c'est trouver **tous** les nombres qui rendent cette égalité vraie lorsqu'ils sont mis à la place de l'inconnue.
Chaque expression de part et d'autre du signe égal est appelée « membre de l'équation ».
Exemple :

$$7x - 6 = 9 + 2x$$

Premier membre   Second membre

a) Résolution de l'équation

- On peut ajouter ou retrancher un même nombre aux deux membres d'une équation.
- On peut multiplier ou diviser les deux membres par un même nombre non nul.

Exemples :

- Résoudre dans R l'équation : $4x - 2 = 2x - 1$

On regroupe les termes contenant l'inconnue dans un seul membre

$$4x - 2x = -1 + 2 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = 1/2$$

L'ensemble des solutions est : $S = \{1/2\}$

- Résoudre dans R : $8x - 3 = 17 + 8x$

$$8x - 8x = 17 + 3 \Rightarrow 0x = 20$$

L'ensemble des solutions est : $S = \varnothing$

- Résoudre dans R : $8x + 7 - (5x + 3) = 3(x + 4/3)$

$$8x + 7 - 5x - 3 = 3x + 4 \Rightarrow 3x + 4 = 3x + 4 \Rightarrow 0x = 0$$

L'ensemble des solution est : $S = \mathbb{R}$

> Une équation du premier degré à une inconnue peut se mettre sous la forme $ax = b$
>
> Si $a \neq 0$, on a $x = b/a$
>
> Il y a une seule solution : $S = \{b/a\}$

b) Résolution d'un problème à l'aide d'une équation

PROBLEME

On choisit l'inconnue	On met en équation	On résout l'équation	On valide et on interprète le résultat

Exemple :

Une voiture a perdu la première année le cinquième de sa valeur. La deuxième année, elle perd encore le sixième de sa nouvelle valeur. Elle représente alors un capital de 8600 €. Quelle était sa valeur neuve ?

Choisissons l'inconnue : soit x la valeur de la voiture neuve.

Traduisons l'énoncé par une équation :

A la fin de la première année, la voiture a perdu : $x \times 1/5 = x/5$, sa nouvelle valeur est $x - x/5 = 4x/5$

A la fin de la deuxième année, la voiture a perdu : $4x/5 \times 1/6 = 4x/30$, sa nouvelle valeur est : $4x/5 - 4x/30$

Nous avons donc l'égalité : $4x/5 - 4x/30 = 8600$ $24x/30 - 4x/30 = 8600$ $20x/30 = 8600$

$2x/3 = 8600$ d'où $x = 8600 \times 3/2 = 12900$ €

2) Equations se ramenant au premier degré

- *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $4(x+3) - (2x+1)(x+3) = 0$

En développant on obtient : $4(x+3) - (2x+1)(x+3) = --2x^2 - 3x + 9$ qui est une équation du second degré. On peut aussi mettre $(x + 3)$ en facteur, on obtient :

$$(x+3)\,[4 - (2x+1)] = 0$$
$$(x+3)\,(-2x+3) = 0$$

Or nous savons que, pour qu'un produit de facteurs soit nul, **il faut et il suffit que l'un des facteurs soit nul**. On a donc a résoudre : $x + 3 = 0$ ou $-2x + 3 = 0$

d'où $x = -3$ ou $x = 3/2$

L'ensemble des solutions est $S = \{-3 ; 3/2\}$

- *Pour quelle valeur de* x *l'expression* $\dfrac{1}{x+1}$ *prend la valeur 3 ?* ($x \in \mathbb{R}$)

Remarque : $\dfrac{1}{x+1}$ n'existe que si $x + 1 \neq 0$

Nous avons donc à résoudre : $x + 1 \neq 0$ et $\dfrac{1}{x+1} = 3$

$x + 1 \neq 0$ donne $x \neq -1$

$\dfrac{1}{x+1} = 3$ donne $3(x + 1) = 1$ d'où $x = -2/3$

Comme $-2/3 \neq -1$, nous avons : $S = \{-2/3\}$

- Résoudre dans R l'équation $\dfrac{10-3x}{2x^2-x} - \dfrac{2}{x} = \dfrac{-1}{2x-1}$

Nous devons avoir : $x \neq 0$; $2x - 1 \neq 0$; $2x^2 - x \neq 0$

$2x - 1 \neq 0$ donne $x \neq 1/2$

Comme $2x^2 - x = x(2x - 1)$, $2x^2 - x \neq 0$ se ramène à $x \neq 0$ et $x \neq 1/2$

Réduisons au même dénominateur :

$\dfrac{10-3x}{x(2x-1)} - \dfrac{2(2x-1)}{x(2x-1)} = \dfrac{-x}{x(2x-1)}$ d'où $10 - 3x - 2(2x - 1) = -x$

En développant et en réduisant, on obtient : $6x = 12$ soit $x = 2$

Cette solution est différente de 0 et 1/2, on a : $S = \{2\}$.

Exercices : **Résoudre les équations suivantes …**

$$\frac{x+7}{4} - \frac{x-1}{6} = \frac{x+2}{3}$$

$\frac{3(x+7)}{4\times3}-\frac{2(x-1)}{6\times2}=\frac{4(x+2)}{3\times4}$ $\Rightarrow 3x + 21 - 2x + 2 = 4x + 8 \Rightarrow 3x - 2x - 4x = 8 - 21 - 2 \Rightarrow -3x = -15 \Rightarrow$

$x=\frac{15}{3}=5$

$3(2x+4)-2x=14-2(1-2x)$

$6x + 12 - 2x = 14 - 2 + 4x \Rightarrow 6x - 2x - 4x = 14 - 2 - 12 \Rightarrow 0x = 0 \Rightarrow S = \mathbb{R}$

$5x^2-7x=0$

$x\ (5x - 7) = 0$ (un produit de facteurs est nul quand l'un des facteurs est nul) $\Rightarrow x = 0$ ou $5x - 7 = 0$

$(x = 7/5) \Rightarrow S = \{0\ ;\ 7/5\}$

$\frac{2x+3}{x-1}=0$

Il faut que $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$; $2x + 3 = 0$ pour $x = -3/2 \Rightarrow S = \{-3/2\}$

$\frac{2x-3}{x+1}=\frac{2x+3}{x-2}$

On réduit au même dénominateur $(x + 1)(x - 2)$; $\frac{(2x-3)(x-2)}{(x+1)(x-2)}=\frac{(2x+3)(x+1)}{(x+1)(x-2)}$; $[2x \times x + 2x \times (-2) - 3 \times x - 3 \times (-2)] = (2x \times x + 2x \times 1 + 3 \times x + 3 \times 1)$; $\cancel{2x^2} - 4x - 3x + 6 = \cancel{2x^2} + 2x + 3x + 3 \Rightarrow -4x - 3x - 2x - 3x = 3 - 6 \Rightarrow -12x = -3 \Rightarrow x = 3/12 \Rightarrow x = 1/4 \Rightarrow S = \{1/4\}$

3) Système du premier degré à 2 inconnues

Résoudre le système : $\begin{cases} 2x-3y+3=0 & (1) \\ 4x-y-4=0 & (2) \end{cases}$

c'est déterminer l'ensemble des couples (x, y) vérifiant à la fois les équations (1) et (2) .

a) Résolution algébrique

♦ **Méthode par substitution**

On exprime une inconnue en fonction de l'autre dans une équation. De (2), on tire : $y = 4x - 4$

On reporte l'expression obtenue dans l'autre équation : $2x - 3(4x - 4) + 3 = 0$

On résout l'équation du premier degré à une inconnue : $2x - 12x + 12 + 3 = 0$; $-10x = -15$; $x = 1,5$

On en déduit la valeur de l'autre inconnue : $y = 4(1,5) - 4 = 2$

La solution du système est le couple : (1,5 ; 2).

♦ **Méthode par addition**

On multiplie les deux membres d'une équation (ou des deux) par un coefficient convenable de façon à faire disparaître une inconnue par addition :

$$\begin{array}{rl} & 2x-3y+3=0 \\ \times(-3) & 4x-y-4=0 \end{array} \quad \text{soit} \quad \begin{array}{r} 2x-3y+3=0 \\ -12x+3y+12=0 \\ \hline -10x+15=0 \end{array} \quad \text{d'où} \quad x=1,5$$

$$\times(-2)\quad \begin{array}{l} 2x-3y+3=0 \\ 4x-y-4=0 \end{array} \quad \text{soit} \quad \begin{array}{r} -4x+6y-6=0 \\ 4x-y-4=0 \\ \hline 5y-10=0 \end{array} \quad \text{d'où} \quad y=2$$

La solution du système est le couple (1,5 ; 2)

♦ Utilisation des déterminants

Le déterminant du système $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ est le nombre $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab'-ba'$

Le système a une solution unique (un couple de solution) si, et seulement si, le déterminant est différent de zéro.

Pour calculer x ,on remplace les coefficients de x par les seconds membres. $x = \dfrac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\Delta} = \dfrac{cb'-bc'}{ab'-a'b}$

Pour calculer y , on procède de façon analogue. $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\Delta} = \dfrac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$

Si le déterminant est nul, le système peut ne pas avoir de solution ou en avoir une infinité.

Exemple :

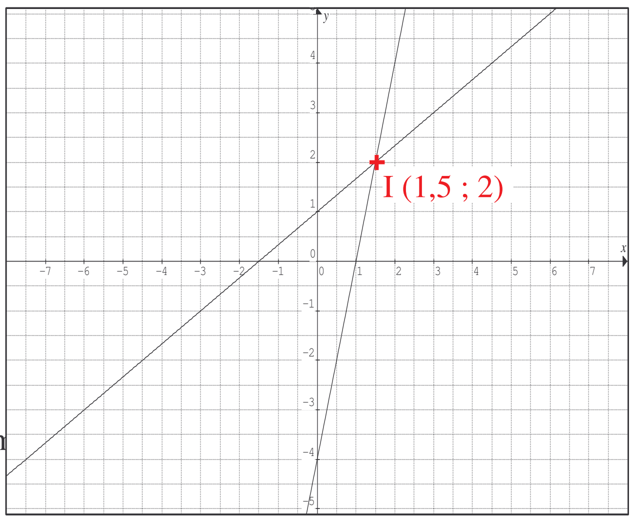
$\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 4x-5y=11 \end{cases}$ le déterminant Δ du système est : $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 2\times(-5)-3\times 4 = -22$

$$x = \frac{7\times(-5)-3\times 11}{2\times(-5)-4\times 3} = \frac{-35-33}{-10-12} = \frac{-68}{-22} = \frac{34}{11}$$

$$y = \frac{2\times 11-4\times 7}{2\times(-5)-4\times 3} = \frac{22-28}{-10-12} = \frac{-6}{-22} = \frac{3}{11}$$

L'unique solution du système est $\left(\dfrac{34}{11};\dfrac{3}{11}\right)$

b) Résolution graphique



$2x - 3y + 3 = 0$ est l'équation d'une droite D_1 (ensemble des points dont les coordonnées vérifient (1)).
$4x - y - 4 = 0$ est l'équation d'une droite D_2 (ensemble des points dont les coordonnées vérifient (2)).

Nous constatons que ces deux droites, représentées ci-contre, ont un point d'intersection dont les coordonnées sont x =1,5 et y = 2.

Le couple (1,5 , 2) est donc la solution unique du systèn
Nous avons ainsi résolu graphiquement le système.